

Издательство Московского университета • 1984

В. А. МАЛЫШЕВ

**Введение
в евклидову
квантовую
теорию поля**



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

В.А. МАЛЫШЕВ

ВВЕДЕНИЕ В ЕВКЛИДОВУ КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Издательство
Московского университета
1985

Малишев В.А. Введение в евклидову квантовую теорию поля. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 96 с.

В пособии дается введение в технику ультрафиолетовых перенормировок в конструктивной евклидовой квантовой теории поля. Эта техника объединяет идеи формальной теории перенормировок, кластерных разложений и ренормализационной группы.

Для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ, а также для специалистов по теории вероятностей и математической физике.

Р е ц е н з е н т ы :

докт. физ.-мат. наук С.А. Молчанов;

докт. физ.-мат. наук Р.А. Минлос

Предисловие	5
-----------------------	---

Часть I

§1. Обобщенные случайные поля: свободное поле, асимптотика ковариации на малых расстояниях; поле в точке и ультрафиолетовое урезание; гиббсовские перестройки. OS -положительность; аксиомы Остервальдера - Предера; рефлексивная положительность; марковость процессов и полей; обратимость	7
§2. Диаграммы: двоеточие и петли в диаграммах; модели : $ex\mu\xi$: : φ^4 :	16
§3. Теорема счета степеней: классификация моделей; оценки диаграмм	22
§4. ∞ -представление: секторы Хенша; асимптотики расходящихся диаграмм по урезанию	22

Часть II

План дальнейшего изложения	36
§5. Разбиение на клетки в импульсном пространстве	37
§6. Кластерное разложение на множестве клеток фазового пространства: область $\varepsilon > \frac{1}{2}$, основные идеи: индуктивная или ренормгрупповая обобщенная кластерная оценка; формула Тейлора; перенормированное расстояние; случай взаимодействия мод; среднее поля и диполи; комбинаторные множители	42
§7. Область $\varepsilon > \frac{1}{2}$, общий случай: обобщенная ренормгрупповая процедура	58
§8. Формальные перенормировки: перенормировка с вакуумными и массовыми диаграммами; теорема Боголюбова - Парасика для сверхперенормируемых теорий; алгебраическая теория R -операции в общем случае	62

§9. Область $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$:

неформальная перенормировка с вакуумными
диаграммами 73

§10. $\varepsilon = \frac{1}{3}$ или $\varphi_{1/3}$:

трудности с массовыми диаграммами 77

§11. Путеводитель по дальнейшему чтению 79

Дополнение 1. Одномерные поля:

процесс Орштейна - Уленбека; марковский оператор;
гармонический и ангармонический осциллятор; гиб-
бовская перестройка и трансфер-матрица; формулы
ФКН; связь со стохастическими дифференциальными
уравнениями 80

Дополнение 2. Фермионные поля:

язык грассмановых алгебр; евклидово поле Дирака;
 OS -положительность и евклидова ковариантность. 87

Литература 95

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие соответствует лекциям, которые читались в 1977-1983 годах на механико-математическом факультете МГУ. Автор хотел дать читателю простой текст для начального чтения по ультрафиолетовой проблеме в конструктивной евклидовой квантовой теории поля. Названная наука является частью более обширной науки - квантовой теории поля (КТП), принадлежащей как физике, так и математике.

В физике на КТП можно смотреть либо как просто на средство систематизировать свойства элементарных частиц, либо как на наиболее фундаментальную (т.е. наиболее микроскопическую) область, из которой большая часть физики должна следовать как частный или предельный случай. Математическая же КТП состоит из двух основных частей: аксиоматической и конструктивной. Следует сказать также, что многие другие области математики претендуют, более или менее обоснованно, на тесную связь с КТП: представления групп Ли, классические уравнения Янга - Миллса и др.

Аксиоматическая КТП в настоящее время испытывает трудности в связи с калибровочными теориями и бессильна перед "квантовой гравитацией", в которой само пространство-время и принцип причинности не может быть сформулирован классически, как в аксиоматике Уайтмана. Конструктивная КТП, возникшая сначала как источник примеров для аксиоматической КТП, сейчас обрела полную самостоятельность, развитие в ней методы применяются в других областях.

Основным достижением (принадлежащим, главным образом, Глиму и Джаффе) конструктивной КТП является создание метода неформального построения сверхперенормируемых теорий. В данном пособии шаг за шагом объясняется этот метод, являющийся синтезом теории формальных перенормировок, кластерных разложений и ренормализационной группы. Чтение же оригинальных статей об этом вызывает большие трудности даже у опытных математиков. Это объясняется как необычностью задач и методов, так и нестандартностью изложения этих работ: отсутствие детальной разработки и даже формулировки центральных понятий, которые, как это может показаться, утонули в море вычислений; свободное использование без достаточного числа ссылок приемов и терминов, известных только работающим в КТП. Одна из причин написания этого пособия та, что у нас фактически нет работ, основанных

на этой технике.

Основной текст пособия нацелен на изложение разложения Глима - Джайфе "в пространстве фазовых клеток", которое отсутствует в книгах Саймона [14] и Глима - Джайфе [13]. Все остальные вопросы, наоборот, достаточно полно изложены в этих двух книгах и нет необходимости их переписывать.

Дополнение 1 может рассматриваться как краткое введение в главу 5 [14]. В дополнении 2 вводится формализм энклидовских фермионных полей.

Данное пособие можно рассматривать как вторую часть лекций автора [18], предварительное знакомство с которыми полезно, но не необходимо.

Наше изложение приспособлено к работе [3], основные методы заимствованы оттуда же. Мы полностью излагаем, образно говоря, теорию $\varphi^4_{3-\varepsilon}$, отсылая читателя за необходимой для φ^4_3 частью доказательства (оценка диаграмм с логарифмическими массовыми расходимостями) к этой статье.

Требования к читателю минимальны: основы теории вероятностей, в первых лекциях - некоторые элементарные понятия теории обобщенных функций, в §8 и дополнении 2 - понятие семинварианта. Однако желательно знакомство со случайными полями, кластерными разложениями и общее представление о математической физике. § 1-3, 5-10 образуют единый текст, и пропуски при чтении создадут трудности в понимании.

На излагаемые здесь методы можно смотреть также как на конкретный бесконечномерный анализ, отличающийся от нелинейного анализа в банаховых пространствах; в последнем фактически повторяется конечномерная ситуация.

В настоящее время начинает появляться более рафинированная техника (см. конец §10), однако описываемые здесь более ранние подходы, по-видимому, еще долго не потеряют своего значения.

§1. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть \mathcal{L} — линейное пространство над R , например \mathcal{L} есть $C_0^\infty(R^v)$ или пространство Шварца $S(R^v)$. Мы будем рассматривать изоморфное \mathcal{L} пространство \mathcal{L}_1 ; элементы \mathcal{L} будут обозначаться φ , соответствующие элементы \mathcal{L}_1 — ξ_φ , таким образом

$$\xi_{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2} = \lambda_1 \xi_{\varphi_1} + \lambda_2 \xi_{\varphi_2}. \quad (1)$$

Пусть $P(\mathcal{L})$ — алгебра коммутативных многочленов от ξ_φ ; $\langle \cdot \rangle$ — линейный функционал на этой алгебре, причем $\langle 1 \rangle = 1$. Такой функционал называется гауссовским (с нулевым средним), если $\langle \xi_\varphi \rangle = 0$,

$$\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle = \begin{cases} 0, & n - \text{нечётно}, \\ \sum \langle \xi_{i_1} \xi_{j_1} \rangle \dots \langle \xi_{i_m} \xi_{j_m} \rangle, & n=2m, \end{cases} \quad (2)$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $\{1, \dots, n\}$ на пары.

Замечание 1.1.

Кроме "бозонных" алгебр $P(\mathcal{L})$ рассматриваются также "фермионные" грассмановы супералгебры $G(\mathcal{L})$, т.е. алгебры многочленов от антикоммутирующих переменных ξ_φ , а также тензорное произведение конечного числа алгебр $P(\mathcal{L})$ и супералгебр $G(\mathcal{L})$.

Объектом евклидовой квантовой теории поля являются линейные функционалы на таких алгебрах, удовлетворяющие некоторым аксиомам, формулируемым ниже (с. 13-14).

Далее мы в основном будем рассматривать случай, когда

ξ_φ — случайные величины на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) и

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\Omega} d\mu. \quad (3)$$

Случайным полем будем называть систему случайных величин ξ_φ на (Ω, Σ, μ) . При этом условие (1) для каждой $\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2$ должно быть выполнено с вероятностью 1.

Мы будем рассматривать только такие случайные поля (т.е. меры μ), что $\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle$ все конечно.

Примеры гауссовских полей.

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых гауссовых величин с нулевыми средними и единичной дисперсией, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) , которое можно реализовать, например, как произведение вещественных прямых.

Пусть на \mathcal{L} задано положительно-определенное скалярное произведение (φ_1, φ_2) , $\overline{\mathcal{L}}$ — пополнение по нему. Выберем ортонормированный базис e_1, e_2, \dots в $\overline{\mathcal{L}}$ и положим $\xi_{e_i} \equiv \xi_i$, причем если $\varphi = \sum c_i e_i \in \mathcal{L}$, $\sum |c_i|^2 < \infty$, то положим

$$\xi_{\varphi} = \sum c_i \xi_{e_i}, \quad (4)$$

где последний ряд очевидно сходится в средне-квадратичном. При этом ξ_{φ} образуют гауссову систему и

$$\langle \xi_{\varphi} \rangle = 0, \quad \langle \xi_{\varphi_1} \xi_{\varphi_2} \rangle = (\varphi_1, \varphi_2). \quad (5)$$

Нетрудно проверить независимость $\langle \cdot \rangle$ от выбора базиса.

Примеры.

- 1) Если $\mathcal{L} = S(R^D)$ и $(\varphi_1, \varphi_2) = \sigma^2 \int \varphi_1 \varphi_2 dx$, то получается белый шум с дисперсией $\sigma^2 R^D$.
- 2) Если $\mathcal{L} = S(\widetilde{R^D})$ и

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \frac{\widetilde{\varphi}_1(k) \widetilde{\varphi}_2(k) dk}{k^2 + m^2}, \quad (6)$$

где $\widetilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-D/2} \int e^{i(k,x)} \varphi(x) dx$,

$$x = (x^1, \dots, x^D), \quad k = (k^1, \dots, k^D),$$

$$k^2 = (k^1)^2 + \dots + (k^D)^2, \quad (7)$$

то получаем поле, называемое свободным евклидовым полем массы $m^2 > 0$. Мы будем также рассматривать несколько более общий случай

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \frac{\tilde{\varphi}_1(k) \overline{\tilde{\varphi}_2(k)} dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad (8)$$

$$m^2 > 0, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Таким образом, выбором скалярного произведения (φ_1, φ_2) можно получать (обобщенное) гауссово поле, т.е. систему случайных величин ξ_φ на том же пространстве, где были заданы ξ_i .

Сходимость. Будем говорить, что последовательность мер $\mu^{(n)}$ на (Ω, Σ) сходится к мере μ , если имеет место сходимость в смысле конечномерных распределений (слабая их сходимость), т.е. если $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_{\mu^{(n)}}$ сходятся для всех φ к характеристическим функциям $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_\mu$.

Мы будем говорить также о сходимости функций Швингера, если

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \equiv \langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle_{\mu^{(n)}}$$

сходятся для всех $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

При проверке сходимости $\mu^{(n)}$ к некоторой мере μ удобно доказывать сходимость $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_{\mu^{(n)}}$ равномерно по λ в некотором интервале, содержащем 0 (отсюда следует непрерывность предельной функции в 0). Отсюда следует, что предельные функции являются характеристическими для некоторой меры μ .

Решетчатые поля. Пусть $\xi(t)$ — система случайных величин, занумерованных точками решетки $t \in Z'_\varepsilon$ с шагом $\varepsilon > 0$. Мы можем определить связанное с этой системой обобщенное случайное поле (для $\mathcal{L} = C_0^\infty(R^0)$):

$$\xi_\varphi = \sum_{t \in Z'_\varepsilon} \xi(t) \varphi(t). \quad (9)$$

Рассмотрим, например, случай, когда $\xi(t) \equiv 0$ при $t \notin \Lambda$ (куб в R^0), а остальные $\xi(t)$ имеют совместную плотность распределения

$$p(x_t, t \in \Lambda \cap Z'_\varepsilon) = Z_{\Lambda, \varepsilon}^{-1} \exp \left(- \sum_{t \in \Lambda \cap Z'_\varepsilon} (m^2 x_t^2 + g x_t^4) \right) -$$

$$-z \sum (x_t - x_{t'})^2), \quad (10)$$

$$|t - t'| = \varepsilon$$

$$t, t' \in \Lambda \cap Z_\varepsilon^p$$

Важнейшая нерешенная проблема для $\bar{d} = 4$: существуют ли функции $m^2 = m^2(\varepsilon)$, $g = g(\varepsilon)$, $z = z(\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ случайное поле (9), определяемое распределением (10), сходится к предельному негауссовому полю (т.е. соответствующая последовательность $\langle \cdot \rangle_\varepsilon$ сходится). Требование негауссовости существенно, так как при $g(\varepsilon) \equiv 0$ $m^2(\varepsilon) = \varepsilon^p$, $z = \varepsilon^{p-2}$, имеется сходимость к гауссову полю (к свободному полю в Λ).

Для $\bar{d} = 1, 2, 3$ эта проблема решается положительно, для $\bar{d} \geq 5$ — отрицательно.

Свободное поле в точке.

Пусть ξ_φ — гауссово поле и $\delta_x(\cdot) = \delta(x - \cdot)$ — δ -функция в точке $x \in R^d$. Если $\delta_x \in \mathcal{L}$, то $\xi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \xi \delta_x$ существует (имеет конечную дисперсию) и называется полем в точке x . Нетрудно доказать, что свободное поле в точке существует только для $\bar{d} = 1$ и при этом

$$\langle \xi^2(x) \rangle = (2\pi)^{-1} \int \frac{dk}{k^2 + m^2} < \infty.$$

Определим двухчастичную обобщенную функцию Ливингера свободного поля

$$\begin{aligned} C(x_1 - x_2) &\equiv S(x_1, x_2) \equiv S^{(2)}(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}) = (\delta_{x_1}, \delta_{x_2}) = \\ &= (2\pi)^{-\bar{d}} \int \frac{\exp[i(k, x_1 - x_2)]}{k^2 + m^2} dk. \end{aligned} \quad (11)$$

Лемма 1.1.

Обобщенная функция $C(x)$ умеренного роста имеет следующие свойства:

i) $C(x)$ — изотропная положительная аналитическая функция при $x \neq 0$;

ii) (поведение в бесконечности) при $|x| \rightarrow \infty$

$$|C(x)| \leq \text{const } e^{-m|x|};$$

iii) (сингулярность в нуле) при $|x| \rightarrow 0$

$$\nu=1 \quad C(x) \rightarrow \text{const}; \quad (11')$$

$$\nu=2 \quad C(x) + (2\pi)^{-1} \ln|x| \rightarrow \text{const};$$

$$\nu=3 \quad C(x) + \frac{c}{|x|} \rightarrow \text{const};$$

$$\nu=4 \quad C(x) + \frac{c}{|x|^2} + C_1 \ln|x| \rightarrow \text{const};$$

$$\nu \neq 3 \quad C(x) \sim \frac{c}{|x|^{\nu-2}} \quad (\text{такое поведение называется каноническим}).$$

Доказательство. В существовании интеграла (11) в бесконечности при $x \neq 0$ можно убедиться, проинтегрировав несколько раз по частям. Ввиду очевидной изотропности будем считать, что

$$x^2 = \dots = x^\nu = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$C(x^1, 0, \dots, 0) = (2\pi)^{-\nu} \pi \int \frac{e^{-|x^1| \sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(\nu)})^2 + m^2}}}{\sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(\nu)})^2 + m^2}} dk^{(2)} \dots dk^{(\nu)}, \quad (12)$$

в чем легко убедиться, вычисляя вычет в точке $k^{(1)} =$

$$i \sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(\nu)})^2 + m^2} \quad \text{комплексной плоскости } k^{(1)}.$$

Отсюда следует положительность и свойство ii). Первые четыре свойства iii) есть простое упражнение на асимптотику интеграла (12). Можно также воспользоваться явным представлением (11) через специальные (бесселевы) функции. Последнее свойство доказывается тривиально: сделаем в (11) замену $k = \frac{k'}{|x|}$. Тогда

$$C(x) = (2\pi)^{-\nu} \frac{1}{|x|^{\nu-2}} \int \frac{\exp[i(k', \frac{x}{|x|})]}{(k')^2 + |x|^2 m^2} dk'. \quad (13)$$

Последний интеграл по области $|k'| \leq 1$ мажорируется сходящимся $\int (k')^{-2} dk'$, а по остальной области в его сходимости можно убедиться интегрированием по частям.

Урезанное поле.

Пусть $\eta(x)$ — вещественная функция из $\bar{\mathcal{L}}$. Обозначим

$$\xi_{\eta}(x) = \xi_{\eta(x-\cdot)},$$

(т.е. формально $\xi_{\eta}(x) = \eta * \xi = \int \eta(x-y) \xi(y) dy$).
Тогда

$$\langle \xi_{\eta}(x) \xi_{\eta}(y) \rangle = \int \frac{|\tilde{\eta}|^2 e^{i(k, x-y)}}{k^2 + m^2} dk. \quad (15)$$

$\xi_{\eta}(x)$ называется урезанным полем в точке x .
Например, пусть $\tilde{\eta} = \chi_{[|k| \leq \kappa]}$. Тогда $\xi_{\eta}(x)$ обозначается $\xi_{\kappa}(x)$. В случае свободного поля ξ_{φ} поле $\xi_{\kappa}(x)$ непрерывно по x в средне-квадратичном и

$$\int \xi_{\kappa}(x) \varphi(x) dx \rightarrow \xi_{\varphi}$$

в средне-квадратичном для $\varphi \in \overline{\mathcal{L}}$. Негауссовы поля получают с помощью изменения меры.

Гиббсовские перестройки.

Пусть f — вещественная ограниченная снизу функция вещественного переменного. При $\beta=1$, когда существует свободное поле в точке $\xi(x)$, мы можем построить случайную величину

$$U_{\Lambda} = \int_{\Lambda} f(\xi(x)) dx, \quad (16)$$

где Λ — отрезок. Последний интеграл существует в средне-квадратичном, если, например, f непрерывна.

Замечание 1.2.

При $\beta=1$ свободное поле можно считать известным процессом Орнштейна — Уленбека (гауссовским марковским стационарным процессом), траектории которого непрерывны с вероятностью 1. Поэтому и интеграл (16) определен с вероятностью 1.

Мера μ_{Λ} с плотностью Радона — Никодима

$$\frac{d\mu_{\Lambda}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda}^{-1} \exp(U_{\Lambda}) \quad (17)$$

называется гиббсовской перестройкой меры μ_0 . Заметим, что справа стоит действительно плотность, так как ввиду ограниченности U_{Λ} снизу $\exp(-U_{\Lambda}) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu_0)$, т.е.

$$Z_{\Lambda} = \langle \exp(-U_{\Lambda}) \rangle_0 < \infty. \quad (18)$$

В общем случае мы можем определить урезанную меру (перестройку)

$$\frac{d\mu_{\Lambda, \kappa}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda, \kappa}^{-1} \exp(-U_{\Lambda, \kappa}), \quad (19)$$

$$U_{\Lambda, \kappa} = \int_{\Lambda} f(\xi_{\kappa}(x)) dx,$$

где f может зависеть от выбора m, Λ и κ , как от параметров.

Основная наша задача - найти такие функции f для заданной размерности ν (Λ - везде далее единичный куб), чтобы при снятии обрезания (т.е. при $\kappa \rightarrow \infty$) $\mu_{\Lambda, \kappa}$ сходилась к некоторой мере μ_{Λ} .

ОТСТУПЛЕНИЕ - OS-ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ

В евклидовой квантовой теории поля представляют основной интерес поля, удовлетворяющие свойству рефлексивной положительности - основной аксиоме в системе аксиом Остервальдера - Шредера, которая позволяет по случайному полю строить релятивистское квантовое поле.

Если $S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ непрерывны (в топологии пространства Шварца) по каждой из φ_i в отдельности, то существует обобщенная функция $S(x_1, \dots, x_n)$ на $R^{\nu n}$ умеренного роста (т.е. из $S'(R^{\nu n})$), что

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \int S(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1)$$

(это есть теорема о ядре; см. [24, т.1, с.164]).

Удобная нам форма аксиом Остервальдера - Шредера состоит из двух требований:

I. Функции Швингера $S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ непрерывны в топологии пространства Шварца;

II. OS-положительность.

Определим сначала операцию отражения $\mathcal{Q} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$; для точек: $\mathcal{Q}(\tilde{x}, x^0) = (\tilde{x}, -x^0)$, $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^{\nu-1})$;

для $\varphi \in \mathcal{S}(R^d) : (\partial \varphi)(x) = \varphi(\partial x)$;

для случайных величин:

$$\partial(\xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n}) = \xi_{\partial \varphi_1} \dots \xi_{\partial \varphi_n}.$$

Последнее отображение продолжается до отображения $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ в себя, если Σ — σ -алгебра, порожденная случайными величинами ξ_{φ} .

Пусть L^+ — подпространство $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, натянутое на случайные величины $\xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n}$, где носители $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ лежат в области $\{x : x > 0\}$. Требование OS -положительности состоит в том, что для всех $\xi \in L^+$

$$\langle (\partial \xi) \xi \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Замечание 1.3. Кроме того, обычно требуется

III. Евклидова инвариантность функций Швингера

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = S^{(n)}(g\varphi_1, \dots, g\varphi_n), \quad (3)$$

$$(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x),$$

где g — элемент собственной евклидовой группы движений R^d .

Мы здесь будем заниматься только построением полей в конечном объеме. Нетрудно построить развиваемыми здесь методами поля на торе, инвариантные относительно группы движений тора. Задача о построении полей во всей плоскости, исходя из построенных полей в конечных объемах (термодинамический предельный переход), носит другой характер. Здесь, в частности, применима стандартная техника кластерных разложений, мы не будем на этом останавливаться (см. дополнение I).

Мы разберем теперь несколько методов получения полей со свойством OS -положительности.

I. Предел OS -положительных мер является OS -положительной мерой (мы предполагаем, что все функции Швингера конечные).

II. Если куб Λ симметричен относительно гиперплоскости $x^d = 0$, то поле ξ_{φ} , определенное формулами (1.9), (1.10), OS -положительно. Действительно, если в последней сумме под знаком экспоненты в (1.10) оставить только сумму по t, t' , принадлежащим гиперплоскости $x^d = 0$, то OS -положительность очевидна. Обозначим $\langle \cdot \rangle_0$ — среднее по полученному таким образом распределению. Тогда оставшаяся часть плот-

ности представима в виде

$$\rho = (\theta F)F, \quad F = \exp(-z \sum (x_t - x_{t'})^2),$$

где сумма по всем допустимым парам t, t' , таким, в которых хотя бы одна точка t или t' имеет координаты $x^v > 0$.

III. Предыдущий случай является частным случаем следующего принципа: если $\langle \cdot \rangle_0 - OS$ -положителен и

$$U_\lambda = F + \theta F$$

то гиббсовская перестройка (1.17) OS -положительна, если $F \in L^+$ и F ограничена снизу. Поэтому удобно выбирать урезание

$$\rho(x^1, \dots, x^v) = \rho(x^1, \dots, x^{v-1}) \delta(x^v),$$

что обеспечивает OS -положительность (1.19).

IV. Гауссово поле с ковариацией

$$C(x-y) = \int \frac{\exp[i(\kappa, x-y)]}{P(\kappa)} d\kappa, \quad (4)$$

где $P(\kappa)$ - многочлен четной степени ≥ 4 , не может быть OS -положительным. Действительно, например, при $\beta=1$ достаточно показать, что $\langle (\theta F)F \rangle < 0$ для $F = \xi_{\delta^v(x-\cdot)}$ с $x = (\vec{x}, x^v)$ и $x^v > 0$ достаточно мало. Для $x^v = 0$ это проверяется простым вычислением, а для $x^v > 0$ малых следует из соображений непрерывности.

На этом примере видно также различие между свойством марковости для случайных процессов и случайных полей. Процесс (4) будет марковским как поле для всех $P(\kappa)$, но марковским как процесс он будет только для многочлена степени ≤ 2 , т.е. если $P(\kappa) = \kappa^2 + m^2$. Это - хорошо известный процесс Орнштейна - Уленбека, единственный гауссовский марковский процесс.

Таким образом, OS -положительность соответствует скорее марковости процесса, чем марковости поля. Однако не все стационарные марковские процессы являются OS -положительными, а только обратимые, т.е. те, в которых переходный оператор марковского процесса является самосопряженным в гильбертовом пространстве по инвариантной мере.

Докажем OS -положительность процесса Орнштейна - Улен-

бека. Пусть Σ_0 - σ -алгебра в точке $x=0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \xi(\vartheta \xi) \rangle &= \langle M[\xi(\vartheta \xi) | \Sigma_0] \rangle = \\ &= \langle M[\xi | \Sigma_0] M[\vartheta \xi | \Sigma_0] \rangle = \\ &= \langle (M[\xi | \Sigma_0])^2 \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Во втором равенстве мы воспользовались марковостью, а в третьем обратимостью.

Замечание 1.4. Для конечных стационарных цепей Маркова с переходными вероятностями P_{ij} и стационарными вероятностями π_i условие обратимости имеет вид

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \text{для всех } i, j$$

или, что эквивалентно,

$$P_{ij} = P_{ji}^-,$$

где

$$P_{ji}^- = P(x(t-1)=j / x(t)=i)$$

ввиду

$$\begin{aligned} P(x(t-1)=j, x(t)=i) &= \pi_i P_{ji} = \pi_j P_{ji}^- \\ &= P(x(t-1)=j, x(t)=i) = \pi_i P_{ji}^-. \end{aligned}$$

У. Для свободного поля в размерности ν доказательство OS -положительности повторяет (5), где в качестве Σ_0 берется σ -алгебра на множестве $\{x: x^\nu = 0\}$. Иначе говоря, мы рассматриваем поле как марковский процесс, в котором в качестве времени берется x^ν .

В наиболее сложных и интересных случаях (модель φ_3^4 , см. ниже) марковость в этом смысле отсутствует. Однако OS -положительность имеет место.

§2. ДИАГРАММЫ

Диаграммный язык и диаграммное образное мышление являются основой всех вычислений в квантовой теории поля. Основой диаграммной техники является формула (1.2). Напомним, что для гауссовой случайной величины ξ с $\langle \xi \rangle = 0$

$$\langle \exp a \xi \rangle = \exp(a^2 \langle \xi^2 \rangle) \quad (1)$$

является целой функцией a .

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n - гауссова система с $\langle \xi_i \rangle = 0$, т.е.

$$\langle \exp(\sum a_i \xi_i) \rangle = \exp(\langle (\sum a_i \xi_i)^2 \rangle). \quad (2)$$

Разлагая левую и правую часть (2) в ряд по a_i и приравнявая коэффициенты перед $a_1 \dots a_n$, нетрудно доказать формулу (1.2).

Первая возможность построения негауссовых (в частности, OS-положительных) полей вида $\lim_{\kappa} \mu_{\lambda, \kappa}$ для $\mu_{\lambda, \kappa}$ вида (1.19) состоит в том, чтобы: 1) найти $f(\xi_{\kappa}(x))$ такие, чтобы существовали случайные величины

$$\lim_{\kappa} \int f(\xi_{\kappa}(x)) dx = U_{\lambda}; \quad (3)$$

2) доказать устойчивость статистической суммы, т.е.

$$Z_{\lambda} = \langle \exp(-U_{\lambda}) \rangle_0 < \infty; \quad (4)$$

Из (3) и (4) тогда следует OS-положительность меры μ_{λ} с плотностью

$$\frac{d\mu_{\lambda}}{d\mu_0} = Z_{\lambda}^{-1} \exp(-U_{\lambda}).$$

Мораль, которая будет следовать из дальнейшего изложения, состоит в том, что для этого и для других целей надо уметь вычислять моменты $\langle U_{\lambda}^n \rangle_0$. Для вычисления моментов многочленов мы можем воспользоваться формулой (1.2). Пусть сначала

$f(y) = y^{\kappa}$. Тогда по формуле (1.2)

$$\langle U_{\kappa}^n \rangle_0 = \sum_G \int_{\Lambda} G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (5)$$

где сумма берется по "диаграммам" G , которые мы сейчас введем.

Пусть каждой точке x_i соответствует K занумерованных отростков $(i, 1), \dots, (i, K)$. Разобьем все множество таких Kn отростков на пары. Если каждую такую пару $\ell = \{(i, \kappa_1), (j, \kappa_2)\}$ интерпретировать как ребро, соединяющее вершины i и j , то получится граф (диаграмма) G с n вершинами и $\frac{Kn}{2}$ ребрами. Сопоставим ей функцию

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\ell} \langle \xi_{\kappa}(x_i) \xi_{\kappa}(x_j) \rangle_0, \quad (6)$$

где произведение по всем ребрам ℓ диаграммы G , а x_i и x_j — вершины ребра ℓ . В формуле (5) сумма берется по всем таким диаграммам G (подчеркнем, что отростки занумерованы).

В диаграммах могут быть петли (пары вида $\{(i, \kappa_1), (i, \kappa_2)\}$). Множитель в (6), соответствующий петле из точки x_i в x_i , есть дисперсия $\langle \xi_{\kappa}^2(x_i) \rangle_0$.

Легко подсчитывается, что дисперсия при урезании κ ведет себя следующим образом:

$$\langle \xi_{\kappa}^2(x) \rangle_0 \sim \begin{cases} C \ln \kappa, & \nu = 2; \\ C \kappa^{\nu-2}, & \nu \geq 3. \end{cases} \quad (7)$$

Поэтому из свойства положительности в лемме 1.1 нетрудно вывести, что $\langle U_{\lambda, \kappa}^n \rangle_0 \rightarrow \infty$ при $f(y) = y^{\kappa}$. Основная идея состоит в том, чтобы найти такие многочлены f (от случайной величины ξ_{κ}), что при вычислении их моментов в диаграммах отсутствуют петли (это и даст $\lim \langle U_{\lambda, \kappa}^n \rangle_0 \neq \infty$).

Определение 2.1. Для гауссовой ξ , $\langle \xi \rangle = 0$

$$: \exp a \xi : \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp a \xi}{\langle \exp a \xi \rangle} = \exp(a \xi - a^2 \langle \xi^2 \rangle). \quad (8)$$

Введенная случайная величина (называемая виковской экспонентой) является (с вероятностью 1) целой функцией от a . Мы определим случайную величину $: \xi^n :$ как коэффициент в разложении

$: \exp a \xi :$ в ряд Тейлора по a

$$: \exp a \xi : \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} : \xi^n :. \quad (9)$$

Приравнявая (9) к разложению по a правой части (8), легко вычитать ($\langle \xi \rangle = 0$)

$$\begin{aligned} : 1 : &= 1, \quad : \xi : = \xi, \quad : \xi^2 : = \xi^2 - \langle \xi^2 \rangle, \\ : \xi^4 : &= \xi^4 - 6 \xi^2 \langle \xi^2 \rangle + 3 \langle \xi^2 \rangle^2 \end{aligned} \quad (10)$$

и т.д.

Для гауссовой системы ξ_1, \dots, ξ_n определим
 $:\xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n}: \quad$ (виковский моном) как коэффициент в
 разложении

$$:\exp(\sum a_i \xi_i): = \sum \frac{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} : \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} : \quad (11)$$

(подробнее о многочленах Вика см., например, [13, 14, 19]).

Если ξ_1, \dots, ξ_n - гауссова система, то сравнение
 двух формул

$$\begin{aligned} \langle \prod_i \exp \xi_i \rangle &= \exp \langle (\sum_i \xi_i)^2 \rangle, \\ \langle \prod_i \exp \xi_i \rangle &= \exp [(\sum \xi_i)^2 - \sum \langle \xi_i^2 \rangle] \end{aligned} \quad (12)$$

показывает, что в правой части второй формулы (12) отсутствуют
 члены $\langle \xi_i^2 \rangle$, (дисперсии=самодействие=петли). По этой же
 причине, разлагая обе части (12) в ряд и пользуясь определени-
 ем (11), получим

Лемма 2.1.

$$\langle : \xi_{x_1}^{k_1} : \dots : \xi_{x_n}^{k_n} : \rangle = \sum G(x_1, \dots, x_n), \quad (13)$$

где сумма по всем диаграммам G без петель (напомним снова,
 что из каждой точки x_i идет k_i занумерованных отростков,
 каждый из которых спарен, образуя ребро, с другим отростком).

Диаграмма общего вида состоит из n вершин $v =$
 $1, \dots, n$, множества L ребер между этими вершинами и
 множества E (свободных) отростков. Пусть каждой вершине
 поставлена в соответствие функция $g_v(x_v)$, каждому ребру -
 "пропэгатор" $C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)})$, каждому отростку $r \in E$ -
 случайная величина $\xi_r(x_{i(r)})$, где $i(r)$ - вершина, из
 которой выходит отросток. Дано также разбиение $\bigcup_r E_r$ мно-
 жества E . Вклад диаграммы G определяется так:

$$I_G = \int_{\wedge} \left[\prod_e C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) \right] \left[\prod_v g_v(x_v) dx_v \right] \times \left[\prod_{z \in E_p} \xi(x_{i(z)}) \right] \quad (14)$$

Далее, если не оговорено противное, мы будем считать, что каждое E_p есть множество всех отростков, выходящих из некоторой вершины. Однако в §8 нам встретится другое разбиение.

Лемма 2.2. (интегрирование по частям).

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$ — гауссова система и F — достаточно гладкая функция от η_1, \dots, η_m с конечной дисперсией и с конечной дисперсией своих производных (далее нам понадобятся только функции вида $F = Pe^{-Q}$, где P — многочлен, Q — ограниченный снизу многочлен).

Тогда

$$\begin{aligned} & \langle : \xi_1 \dots \xi_n : F(\eta_1, \dots, \eta_m) \rangle = \\ & = \sum_{j=1}^m \langle \xi_1 \eta_j \rangle \langle : \xi_2 \dots \xi_n : \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство.

Если $F = : \eta_1 \dots \eta_m :$, то формула (15) есть очевидное следствие леммы 2.1. В общем случае надо либо разложить F по полиномам Эрмита, либо проинтегрировать по частям в гауссовом интеграле (подробнее см. [13]).

Операция $: \cdot :$ над случайными величинами зависит от гауссовой меры; индексы $: \cdot :_{\mu, \varepsilon}$ будут означать соответственно размерность и параметр ε в формуле (1.8), $: \cdot :_{\mu, 0} = : \cdot :_{\mu}$, m^2 фиксировано.

Мы будем называть f (эвклидовым) лагранжианом и говорить о построении $: f :_{\mu, \varepsilon}$ модели, если мы нашли предел μ_{\wedge} у меры (1.19).

Первой нетривиальной моделью, которую мы построим, будет двумерная

Модель $: \exp a \xi :_2$.

В этом случае $\mu_{\wedge} \geq 0$ по определению и надо лишь доказать существование предела $\mu_{\wedge, \varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow \infty$, в средне квадра-

точно. Мы прямо вычислим дисперсию

$$\begin{aligned} \langle U_{\Lambda}^2 \rangle &= \langle \left(\int_{\Lambda} \exp a \xi(x) dx \right)^2 \rangle = \\ &= \langle \iint_{\Lambda \times \Lambda} \exp a^2 C(x-y) dx dy \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользовавшись логарифмической асимптотикой $C(x)$ в лемме 1.1, мы видим, что последний интеграл не превосходит

$$\text{const} \iint |x-y|^{-\frac{a^2}{2\pi}} dx dy$$

и, следовательно, наша модель существует при

$$a^2 < 4\pi. \quad (17)$$

Нетрудно доказать, что при $a^2 \geq 4\pi$ $\langle U_{\Lambda}^2 \rangle = \infty$

Модель: φ^4_2

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{K} < \mathcal{K}_1$. Тогда для любого целого четного $p > 0$

$$\begin{aligned} &\langle \left(\int_{\Lambda} (:\xi_{\mathcal{K}}^4(x): - :\xi_{\mathcal{K}_1}^4(x):) dx \right)^p \rangle_0 \leq \\ &\leq C^p p^{2p} \mathcal{K}^{-\delta p}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $C, \delta > 0$ — константы, не зависящие от \mathcal{K} и p .

Эта лемма будет доказана в §3. Здесь с ее помощью мы докажем существование этой модели.

Полагая $p=2$ мы получаем существование U_{Λ} и конечность ее дисперсии. Однако, в сравнении с предыдущей моделью прибавляется неограниченность U_{Λ} снизу. Точнее, имеет место

Оценка Вика:

$$\begin{aligned} :\xi_{\mathcal{K}}^4(x): &= \xi^4 - 6\xi^2 \langle \xi^2 \rangle + 3 \langle \xi^2 \rangle^2 = \\ &= (\xi^2 - 3 \langle \xi^2 \rangle)^2 - 6 \langle \xi^2 \rangle^2 \geq -6 \langle \xi_{\mathcal{K}}^2(x) \rangle^2 = \end{aligned}$$

$$= - \begin{cases} C & , \nu=1, \\ C \ln^2 x & , \nu=2, \\ C \ln^{2(\nu-2)} & , \nu \geq 3; \end{cases} \quad (19) \quad c > 0.$$

Мы выберем $p = x^{\delta_1}$, $0 < \delta_1 < \delta$. Тогда

$$C^p p^{2p} x^{-\delta p} \leq e^{-b x^{\delta_1}}$$

для некоторой константы $b > 0$. По неравенству Чебышева

$$P(|U_{\lambda, x} - U_{\lambda, x_1}| \geq 1) \leq \langle (U_{\lambda, x} - U_{\lambda, x_1})^2 \rangle \leq e^{-b x^{\delta_1}}$$

Пользуясь оценкой Вика, получаем

$$P(e^{-U_{\lambda}} \geq e^{c \ln^2 x + 1}) \leq e^{-b x^{\delta_1}}$$

Поэтому

$$\langle e^{-U_{\lambda}} \rangle \leq \text{const} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{c \ln^2 n + 1 - b(n-1)^{\delta_1}} < \infty.$$

§ 3. ТЕОРЕМА СЧЕТА СТЕПЕНЕЙ

Пусть G - связная диаграмма без отростков,
 V , $|V| = n$ - множество ее вершин, L - ребер; для лю-
 бого $V' \subset V$ обозначим $L(V') \subset L$ множество всех
 ребер, имеющих оба конца в V' .

Пусть

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{e \in L} C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) \quad (1)$$

и пусть C_e непрерывны и

$$C_e \sim \frac{\text{const}}{|x|^{2-\alpha_e}} \quad (2)$$

при $|x| \rightarrow 0$.

Теорема 3.1.

G локально интегрируема тогда и только тогда, когда для всех $V' \in V$

$$\omega(V') = \omega_G(V') \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{e \in L(V')} \alpha_e + \nu(|L(V')| - |V'| + 1) < 0. \quad (3)$$

Замечание 3.1. Теорема 3.1, если выполнено условие $0 < \alpha_e \leq \nu$, эквивалентна утверждению: G локально интегрируема тогда и только тогда, когда $\omega(V') < 0$ для всех собственных V' , т.е. таких, что граф с множеством вершин V' и ребер $L(V')$ связан и одночастично неприводим (т.е. его нельзя сделать несвязным, отбрасывая лишь одно ребро).

Доказательство. Существует очень много способов доказательства этой теоремы. Мы приводим кратчайший из известных автору.

Необходимость. Пусть $V' = \{x_1, \dots, x_k\}$. Фиксируем точки $x_i \in V'$ и точку x_1 . Пусть все они попарно различны. Будем интегрировать по x_2, \dots, x_k в окрестности x_1 . На единичной сфере $S \subset R^{D(k-1)}$ выберем $k-1$ областей S_2, \dots, S_k , находящихся друг от друга на конечном расстоянии. Пусть $A_m \subset R^{D(k-1)}$ — множество точек (x_2, \dots, x_k) таких, что при $\ell = 2, \dots, k$ для фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \leq |x_\ell - x_1| \leq \frac{\varepsilon}{2^m},$$

и луч в R^D из точки x_1 , проходящий через x_ℓ , пересекает единичную сферу S в области S_ℓ (т.е. x_ℓ лежит в соответствующем конусе). Для сходимости интеграла необходимо, чтобы интеграл по $\bigcup_m A_m$ сходилась для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но равномерно по m для некоторых констант $C_i > 0$

$$C_1 \leq \frac{\int \prod_{e \in L(V')} C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) dx_2 \dots dx_k}{\left(\frac{\varepsilon}{2^m}\right)^{\dim A_m} \left(\frac{\varepsilon}{2^m}\right)^{-\sum_{e \in L(V')} (\nu - \alpha_e)}} \leq C_2. \quad (4)$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$\dim A_m = \nu(|V'| - 1) > \sum_{e \in L(V')} (\nu - \alpha_e) = \nu|L(V')| - \sum_{e \in L(V')} \alpha_e.$$

Интуитивно говоря, расходимость может возникнуть, если несколько частиц коллапсируют к одной, находясь друг от друга и от этой частицы примерно на одинаковом расстоянии.

Достаточность. Индукция по числу $|V'|$. Случай $|V'| = 2$ тривиален. Пусть утверждение теоремы имеет место для $|V'| \leq m-1$ и всех $L(V')$ и α_e . Докажем эту теорему для $|V'| = m$.

Выделим две точки, например, x_1 и x_2 . Пусть L_{12} - множество ребер между вершинами 1 и 2; G_{12} - фактор-граф графа G , полученный отождествлением вершин 1 и 2 и отображением ребер из L_{12} ; обозначим

$$G_{12}(x_2, \dots, x_n) = \prod_{e \in L_{12}} C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}),$$

где $x_1 = x_2$.

Рассмотрим множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ такое, что для фиксированного малого $\varepsilon > 0$

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon, \quad \min_{(i,j) \neq (1,2)} |x_i - x_j| \geq \varepsilon.$$

Фиксируем x_2, \dots, x_n проинтегрируем по x_1 в области $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (фиксировано и мало)

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon, \quad \min_{i \geq 3} |x_1 - x_i| \geq \varepsilon.$$

Пусть для всех $i, j \geq 2$ будет $|x_i - x_j| \geq \varepsilon$.
Значение S этого интеграла удовлетворит неравенству

$$S \leq C G_{12}(x_2, \dots, x_n) \varepsilon^{\nu - \sum_{e \in L_{12}} (\nu - \alpha_e)}. \quad (5)$$

Это следует из того, что существует константа $\theta > 0$, не зависящая от ε для $i \geq 3$ и всех e

$$C_e(x_i - x_1) \leq \theta C_e(x_i - x_2).$$

Пусть $\min_{i \neq 1} |x_i - x_j| = \varepsilon$ достигается для пары (i, j) .
Построим новый граф G'_{12} , добавляя к G_{12} одно ребро e' между вершинами i и j , причем

$$\nu - \alpha_{e'} = -\nu + \sum_{e \in L_{12}} (\nu - \alpha_e).$$

Сходимость интеграла по x_2, \dots, x_n (где $\varepsilon = \min_{i \neq 1} |x_i - x_j|$) от правой части (5) эквивалентна сходимости интеграла для диаграммы G'_{12} .

Рассмотрим любое подмножество вершин V' графа G'_{12} .

1) Если по крайней мере одна из вершин i и j не принадлежит V' , то

$$\omega_{G'_{12}}(V') = \omega_G(V');$$

2) если $i, j \in V'$, то

$$\omega_{G'_{12}}(V') = \omega_G(V' \cup \{1\}).$$

Тогда если $\omega_G(V') < 0$ для всех V' , то

$$\omega_{G'_{12}}(V') < 0 \quad \text{для всех } V' \text{ и всех выборов}$$

точек 1, 2. Последнего достаточно для сходимости интегралов для всех G'_{12} и, следовательно, всех интегралов от правой части (5). Теорема доказана.

Рассмотрим связанные одночастично-неприводимые диаграммы в модели $\varphi^n: \nu, \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{P} = |V|$ вершинами, возникающие при подсчете моментов

$$\langle (\int \varphi^n : dx)^P \rangle_0$$

Для произвольного $V' \subseteq V$ рассмотрим поддиаграмму G' , состоящую из $|V'|$ вершин, $|L(V')|$ ребер, соединяющих вершины V' и называемых внутренними ребрами. Ребра, имеющие только один конец в V' , назовем внешними для G' . Если число внешних ребер равно b , то

$$L' = |L(V')| = \frac{nV' - b}{2}$$

и

$$\omega(V') = \gamma(1 + L' - V') - 2(1 + \varepsilon)L' = \gamma + V'(\frac{\gamma n}{2} - \gamma - n) + b(1 - \frac{\gamma}{2}) - \varepsilon(V'n - b) \quad (6)$$

Далее мы обозначаем $L' = L$, $V = V' = |V'|$.

Замечание 3.2.

$$\alpha_L = 2(1 + \varepsilon),$$

что доказывается повторением рассуждений в формуле (1.13), если $0 < 2(1 + \varepsilon) < \gamma$.

Классификация моделей.

А) теории без расходимостей;

Б) сверхперенормируемые теории — если только конечное число диаграмм примитивно расходится (т.е. $\omega(V) \geq 0$);

В) перенормируемые теории — могут примитивно расходиться диаграммы только при $b \leq b_0$;

Г) остальные называются неперенормируемыми.

Примеры моделей.

1). $\varphi^n :_2$, $\omega = 2(1 - V)$ не зависит от n и b и все диаграммы сходятся;

2). $\varphi^2 :_\gamma$, $\omega = \gamma - 2V + b(1 - \frac{\gamma}{2})$.

Если $\gamma \geq 2$ и $b = 2, 4, \dots$, то все диаграммы сходятся. Могут расходиться только диаграммы с $b = 0$ (такие называются вакуумными).

При $\gamma \geq 3$ все сходятся.

При $\gamma = 4$ расходится только



При $\gamma \geq 4$ конечное число (вакуумных) диаграмм расходится.

3). : φ^4 :₃ . Расходятся две вакуумные диаграммы (в кото-
рых $b=0$)

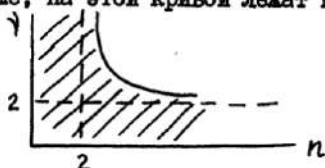


4). : φ^6 :₃ , $\omega = 3 - \frac{b}{2}$ перенормируемая, но
не сверхперенормируемая.

5). : φ^8 :₃ , $\omega = 4 + \nu - \frac{b}{2}$ неперенормируемая.

6). : φ^4 :₄ , $\omega = 4 - b$ перенормируемая, но
не сверхперенормируемая.

В плоскости (ν, n) кривая $\frac{\nu n}{2} - \nu - n = 0$ отделяет
сверхперенормируемые теории, лежащие ниже ее, от неперенормиру-
емых, лежащих выше, на этой кривой лежат перенормируемые теории.



Мы докажем теперь лемму 2.3. Для этого рассмотрим следую-
щий интеграл для финитных функций g_V , $\tilde{g}_V \geq 0$

$$\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_V g_V(x_V) dx_V =$$

$$(2\pi)^{-\nu|L|} \int \prod_\ell \frac{e^{-i(p_\ell, \sum_V e_{V\ell} x_V)}}{(p_\ell^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \times$$

$$\times \eta(\ell) dp_\ell \prod_V g_V(x_V) dx_V =$$

$$= (2\pi)^{-\nu|L|} \int \prod_V g_V(x_V) e^{-i(\sum_\ell e_{V\ell} p_\ell, x_V)} dx_V \times$$

$$\times \prod_\ell \frac{dp_\ell \eta_\ell(p_\ell)}{(p_\ell^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad (7)$$

где матрица инцидентности

$$\varepsilon_{ve} = \begin{cases} 1 & , \text{ если ребро } e \text{ входит в вершину } v, \\ -1 & , \text{ если выходит,} \\ 0 & \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(мы ориентируем ребра произвольно, результат в силу симметрии $C(x)$ не зависит от ориентации). Введенный дополнительно множитель $\eta_e(p_e)$ называется урезанием для линии e .

Рассмотрим левую часть формулы (2.18). Разлагаем

$$\begin{aligned} & : \varphi_{x_1}^4(x) : - : \varphi_x^4(x) : = (: \varphi_{x_1}^4 : - : \varphi_{x_1}^3 \varphi_x :) + \\ & + (: \varphi_{x_1}^3 \varphi_x : - : \varphi_{x_1}^2 \varphi_x^2 :) + \dots + (: \varphi_{x_1} \varphi_x^3 : - : \varphi_x^4 :). \end{aligned}$$

В каждой из скобок после интегрирования все диаграммы имеют хотя бы для одной линии множитель урезания $\int_{\{x \leq |K| \leq x_1\}}$. После возведения в степень p у каждой из диаграмм по крайней мере p линий имеют урезание в интервале $[x, x_1]$.

Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ достаточно малым, чтобы условие $\omega(v') < 0$ осталось выполненным, и вынесем в правой части формулы (7) $(x^2 + m^2)^{-\varepsilon/2}$ за скобку. Отсюда получаем множитель $x^{-\varepsilon p}$ в (2.18). $C^p p^{2p}$

есть оценка сверху числа диаграмм. Остается доказать, что каждая диаграмма, удовлетворяющая условию теоремы счета степеней, оценивается сверху множителем C^p . Для этого рассмотрим следующий метод оценки диаграмм (принадлежащий Глиму - Джайфе).

Пусть G - диаграмма с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и L - множество ее ребер. Пусть $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ - произвольное разбиение множества вершин. Ребро e назовем внутренним для V_i , если обе его вершины лежат в V_i .

e есть передний отросток для V_i , если одна из его вершин принадлежит V_i , а другая V_j с $j < i$, e есть задний отросток для V_i , если $j > i$.

Определим ядро оператора из $L_2(\prod_i^+ dp_e)$ в $L_2(\prod_i^- dp_e)$, где \prod_i^+ - произведение по всем передним отросткам e для V_i , \prod_i^- - по задним, p_e - импульс, соответствующий ребру e (см. формулу (7)):

$$R(v_i) = \int \prod_{v \in V_i} g_v(x_v) \exp(-i(\sum_e \ell_{xe} p_e, x_v)) dx_v$$

$$\times \prod_e \frac{dp_e \eta_e(p_e)}{(2\pi)^{1/2} (p_e^2 + m^2)^{1+\epsilon}} \prod_i^+ \frac{dp_e \eta_e^{1/2}(p_e)}{(2\pi)^{1/2} (p_e^2 + m^2)^{1/2(1+\epsilon)}} \quad (8)$$

где \prod_e - произведение по всем внутренним для V_i ребрам,
 \prod_e^+ - по всем передним и задним для V_i отросткам.
 Пусть $\|V_i\|$ и $\|V_i\|_{\text{н.с.}}$ - нормы этого оператора
 (обычная и Гильберта - Шмидта). При пустом множестве передних
 (или задних) отростков мы полагаем

$$L_2(\prod_i^{+(-)} dp_e) = R.$$

Если оба пусты, то соответствующий оператор является умножением на число и тогда $\|V\| = I_6 \equiv |G|$.

Лемма 3.1.

$$|G| = \|V\| \leq \prod_i \|V_i\| \leq \prod_i \|V_i\|_{\text{н.с.}} = \prod_i |\hat{G}_i|^{1/2},$$

где \hat{G} - диаграмма, полученная из двух идентичных пар V_i
 с отростками спариванием идентичных отростков.

Доказательство. Первое неравенство доказывается последовательным применением двух неравенств

$$\|A \otimes I\| = \|A\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Остальные очевидны.

Следствие 3.1.

Если выполнены условия теоремы счета степеней для всех диаграмм, то

$$|\int G \prod g_v(x_v) dx_v| \leq C^{|V|}.$$

Доказательство получается разбиением V на одноточечные множества.

§4. \mathcal{L} - ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Здесь мы дадим другой метод исследования диаграмм, который, не имея геометрической наглядности метода §3, является более алгоритмическим и обладает другими преимуществами. С его помощью мы передадим результаты §3 и получим асимптотику по параметру урезания расходящихся диаграмм. Основная идея этого метода состоит в том, что \mathcal{L} - представление Симанчика и секторы Хенша, определенные ниже, позволяют "факторизовать" интеграл (3.7) на интегралы вида $\int x^p dx$.

В формуле (3.7) можно рассмотреть случай, когда

$$g_v(x_v) = C \exp\left(-\frac{1}{2} a x_v^2 + i(k_v, x_v)\right) \quad (1)$$

Мы будем рассматривать для простоты только случай $k_v \equiv 0$.
(Комбинацией (1) можно получить произвольную g_v).

Мы используем представление

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L} \quad (2)$$

или, в более общем виде,

$$\frac{1}{(p^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \mathcal{L}^\varepsilon e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L} \quad (3)$$

(последнее следует из очевидной формулы

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{const} \int_0^\infty (\mathcal{L}x)^\varepsilon e^{-\mathcal{L}x} d(\mathcal{L}x)$$

и определения Γ - функции).

Мы будем применять урезание

$$\int_{\mathcal{L}_0}^\infty e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L}$$

вместо введенного ранее. Можно доказать, что введенное ранее урезание (и многие другие) имеет вид

$$\int_0^{\infty} \chi(\alpha) e^{-\alpha(\rho^2 + m^2)} d\alpha,$$

где $\chi(\alpha)$ — некоторая функция, $\chi(0) = 0$ (см. [16]).
Используя (3) можно переписать (3.7) в виде

$$C^{|\nu|} \left[(2\pi)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \right]^{|\nu|} \int \exp \left[-\frac{1}{2} a \sum x_v^2 - \right. \\ \left. - i \sum_{v,e} \ell_{ve}(\rho_e, x_v) - \sum_e \mathcal{L}_e(\rho_e^2 + m^2) \right] \prod_e \mathcal{L}_e^{\varepsilon} \prod dx_v d\rho_e dx_e. \quad (4)$$

Мы проинтегрируем по x_v и ρ_e , воспользовавшись формулой

$$\int \exp \left[i(t, y) - \frac{1}{2} (Q y, y) \right] dy = (2\pi)^{\frac{\nu}{2}(L+\nu)} (\det Q)^{-\frac{\nu}{2}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} (Q^{-1} t, t) \right). \quad (5)$$

в случае $t \equiv 0$ (здесь y — вектор всех x_v, ρ_e а t имеет ту же размерность), и

$$Q = \sum_v a x_v^2 + 2i \sum_{v,e} \ell_{ve}(\rho_e, x_v) + 2 \sum_e \mathcal{L}_e \rho_e^2. \quad (6)$$

Рассмотрев соответствующую этой квадратичной форме симметричную матрицу Q , видим, что

$$\det Q = \sum_{\substack{L' \subset L \\ V' \subset V}} \left(\prod_{e \in L'} 2\mathcal{L}_e \right) a^{|\nu - \nu'|} \det(L', V'). \quad (7)$$

где $\det(L', V')$ — детерминант минора этой матрицы, построенного на строках и столбцах, соответствующих L' и V' , и в котором все диагональные элементы приравнены к нулю.

Таким образом,

$$\det(L', V') = \begin{cases} (-1)^{G(L', V')} D^2, & \text{если } |L'| = |V'|; (8) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$D \stackrel{\text{def}}{=} (i)^{|L'|} \det(e_{ve})_{v, L'},$$

а $G(L', V')$ есть четность $|L'|^2$ (число транспозиций). Поэтому

$$\det(L', V') = D^2. \quad (9)$$

Для вычисления D рассмотрим совокупность $G(L', V')$ вершин V' и ребер L' . Каждый член детерминанта D определяет и определяется взаимно-однозначным отображением (подстановкой) $\varphi: V' \rightarrow L'$, а именно, это есть член

$$\prod_{v \in V'} e_{v, \varphi(v)}. \quad (10)$$

Лемма 4.1.

Если в совокупности ребер L' нет циклов (замкнутых путей), то в D есть не более одного члена и поэтому $D^2 = 1$ или 0.

Если в L' есть циклы, то $D = 0$.

Доказательство. В первом случае L' есть объединение связных деревьев $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots$. Ровно $|L'_1|$ вершин дерева L'_1 должны принадлежать V' , т.е. все, кроме одной. Тогда существует вершина $v \in V'$ у дерева L'_1 , инцидентная только одному ребру $e \in L'_1$. Тогда $\varphi(v) = e$ по необходимости. Далее простое индуктивное рассуждение.

Во втором случае рассмотрим некоторый цикл e_1, \dots, e_k . Пусть V_1, \dots, V_k — вершины этого цикла, все они должны принадлежать V' , V_1 и V_2 инцидентны e_1 , V_2 и V_3 — e_2 и т.д. Есть только два отображения

$\varphi: \{V_1, \dots, V_k\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_k\}$ при фиксированных остальных $\varphi(v)$. Именно, либо $\varphi(V_1) = e_1$, либо e_k и т.д.

Рассмотрим члены D , соответствующие фиксированным остальным $\varphi(v)$. Две подстановки

$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \\ e_1 & \dots & e_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 v_2 \dots v_k \\ e_k e_1 \dots e_{k-1} \end{pmatrix}$
 отличаются знаком $(-1)^{k-1}$, а соответствующие члены \mathcal{D}
 за счет замены $e_{ve} \rightarrow -e_{ve}$ отличаются на $(-1)^k$.
 Поэтому сумма их всегда 0.

Формулу (7) можно переписать так:

$$\det Q = \sum_{L'} \left(\prod_{e \in L'} 2\alpha_e \right) a^{|V|-|L'|} c(L'), \quad (11)$$

где сумма по всем L' без циклов, $|L'| \leq |V|-1$, $c(L')$ —
 число способов выбрать V' так, что $|L'| = |V'|$ есть
 хотя бы (а тогда ровно) одно отображение φ . Такие L'
 будем называть 1-деревьями. При этом $c(L') \leq |L'|+1$.

Секторы Хелпа.

Вся область интегрирования R^N по d_e разбивается
 на $L!$ секторов: $\alpha_{L_1} \leq \dots \leq \alpha_{L_L}$. Рассмотрим,
 например, сектор $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_L$, и сделаем для этого
 сектора замену переменных

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \dots, t_{L-1} = \frac{\alpha_{L-1}}{\alpha_L}, t_L = \alpha_L, \quad (12)$$

$$0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_{L-1} \leq 1, 0 \leq t_L < \infty:$$

Обратная замена имеет вид

$$\alpha_e = t_e t_{e+1} \dots t_L. \quad (13)$$

Якобиан является определителем треугольной матрицы и равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_j} \right\| = \prod_{e=1}^L t_e^{e-1}.$$

Ввиду (13)

$$\prod_{e \in L'} \alpha_e = \prod_{e=1}^L t_e^{\beta_e}, \quad (14)$$

$$\beta_e = \beta_e(L') = |\{1, \dots, e\} \cap (L - L')| = |\{1, \dots, e\} - L'|.$$

Лемма 4.2.

Для данного сектора существует 1-дерево L_0 , такое, что $\beta_e(L_0) \equiv \beta_e^0 \leq \beta_e = \beta_e(L')$

для всех 1-деревьев L' . При этом для любого L' существует $\ell = \ell(L')$ такое, что $\beta_e^0 < \beta_e$.

Доказательство. Построим такое 1-дерево.

Выберем $\ell_1 = 1$, ℓ_2 - первое ребро из оставшихся ребер, не образующее цикла с ℓ_1 и т.д., ℓ_k - первое из оставшихся ребер, не образующее цикла с $\{\ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}$. Из построения ясно, что $L_0 \cap \{1, \dots, \ell\}$ есть дерево с максимальным числом ребер, которое можно вложить в граф G_e , состоящий из ребер $\{1, \dots, \ell\}$ и всех инцидентных им вершин. Пусть число этих вершин есть V_e , а число компонент связности G_e равно K_e . Тогда $\beta_e^0 = \ell - V_e + K_e$. (16)

Отсюда следует первая часть утверждения. Для доказательства последнего надо взять первое ℓ такое, что

$$L' \cap \{1, \dots, \ell\} \neq L_0 \cap \{1, \dots, \ell\}.$$

Из этой леммы получаем

$$\det Q = \prod_e t_e^{\beta_e^0} (1+P), \quad (17)$$

где P - полином с положительными коэффициентами от t_e .

Интеграл (4) тогда переписывается в виде

$$\text{const} \int (1+P)^{-\frac{1}{2}} \prod_e t_e^{-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell \varepsilon + \ell - 1} dt_e, \quad (18)$$

и условие его сходимости

$$-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell \varepsilon + \ell - 1 > -1,$$

или

$$\frac{1}{2}\beta_e^0 - 2(1+\varepsilon)\ell < 0 \quad \text{для всех } \ell. \quad (19)$$

Если граф $\{1, \dots, \ell\}$ связан, то условие (19) ввиду (16) эквивалентно теореме счета степеней, а в случае несвязного графа следует из нее.

Асимптотика по урезанию d_0 .

Рассмотрим интеграл (18) в области (12) с дополнительным ограничением

$$t_\ell t_{\ell+1} \dots t_L \geq \alpha_0 \quad \text{для всех } \ell. \quad (20)$$

Теорема 4.1.

Если

$$\delta = \min \left(-\frac{\gamma}{2} \beta_\ell^0 + \ell \varepsilon + \ell \right) < 0 \quad (21)$$

где минимум берется по всем ℓ и всем секторам, то интеграл (4) по области $[\alpha_0, \infty]$ имеет асимптотику

$$\text{Если } \delta \sim 0, \text{ то } G \sim \text{const } \alpha_0^\delta. \quad (22)$$

$$G \sim \text{const} (\ln |\alpha_0|)^m, \quad (23)$$

где m — целое положительное число, равное максимальному (по всем секторам) числу чисел ℓ таких, что

$$-\frac{\gamma}{2} \beta_\ell^0 + \ell \varepsilon + \ell = 0.$$

Доказательство. Фиксируем сектор и рассмотрим крайние точки подмножества R^L , выделяемого неравенствами (20), или иначе говоря, точки $t' = (t'_1, \dots, t'_L)$, удовлетворяющие (20) и такие, что по крайней мере для одного ℓ в (20) имеет место равенство.

Для заданной такой крайней точки t' обозначим $A(t')$ множество точек $t = (t_1, \dots, t_L)$ таких, что $t_i \geq t'_i$ и интегрируем по этой области $A(t')$. В случае $\delta > 0$ этот интеграл будет достигать максимума, если выбрать сектор ℓ и t'_i так, чтобы

$$t'_\ell = C \alpha_0, \quad t'_i \geq C^{-1}, \quad -\frac{\gamma}{2} \beta_\ell^0 + \ell \varepsilon + \ell = \delta.$$

Интегрируя далее по множеству крайних точек, получаем результат. В случае $\delta = 0$ доказательство аналогично.

ЧАСТЬ II
ОБЩИЙ ПЛАН ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗЛОЖЕНИЯ

Мы будем иметь дело с моделью $\varphi^4_{4,\varepsilon}$. При этом

$$\omega = 4 - b - \varepsilon(4V - b) = b(\varepsilon - 1) + 4(1 - \varepsilon V).$$

Можно выделить следующие области:

A) $\varepsilon > 1$; здесь существует поле в точке и модель тривиальным образом существует;

B) $\varepsilon = 1$; эта модель соответствует φ^4_2 . Мы рассмотрим эту модель с помощью других методов в следующем параграфе, что будет служить подготовкой к области C;

C) $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$; здесь все диаграммы (с 4 отрезками) сходятся, но оценка Вика степенная. На примере этой модели мы поясним основной метод: кластерное разложение на множестве клеток фазового пространства;

D) $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Расходится одна вакуумная диаграмма.

E) $\varepsilon = \frac{1}{3}$; этот случай соответствует φ^4_3 . Только одна массовая диаграмма логарифмически расходится ($\omega = 0$);

F) $\frac{1}{6} < \varepsilon < \frac{1}{3}$; конечное число массовых диаграмм расходится с $\omega < 1$;

G) $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$; есть массовые диаграммы с $\omega \geq 1$;

H) $\varepsilon = 0$. Перенормируемая, но не сверхперенормируемая теория.

Полезно помнить две формулы

$$C(x) \sim \frac{\text{const}}{|x|^{4-2(1+\varepsilon)}},$$

$$\langle \xi^2(x) \rangle_0^2 \sim x^{4-4\varepsilon}.$$

Мы начнем со случая $\varepsilon = 1$ и будем постепенно уменьшать значение ε . При этом трудности будут увеличиваться.

§5. РАЗБИЕНИЕ НА КЛЕТКИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\eta_i(k)$ - неотрицательные функции на R^3 , причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \quad (1)$$

Пусть $\xi_i(x)$ - гауссовы поля с нулевым средним и

$$\langle \xi_i(x) \xi_j(y) \rangle = \delta_{ij} (2\pi)^{-3} \int \eta_i(k) \exp(i(k, x-y)) dk \quad (2)$$

Тогда поле

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x) \quad (3)$$

можно считать совпадающим с гауссовым полем (1.8).

Примеры.

Пусть дана последовательность чисел

$$0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots \quad (4)$$

I. В качестве $\eta_i(k)$ можно рассмотреть функцию

$$\eta_i(k) = \chi_{[M_{i-1}, M_i]}(k) \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \quad (5)$$

II. (Глимм - Джайфе). Часто надо сгладить случай I. Рассмотрим C_0^∞ -функцию $a(\rho)$ такую, что $a(\rho) = 1$ при $|\rho| \leq \frac{1}{2}$, $a(\rho) = 0$ при $|\rho| \geq 2$ и $0 \leq a(\rho) \leq 1$ для остальных ρ . Положим

$$a_0(k) = 0, \quad a_i(k) = a\left(\frac{|k|}{M_i}\right)$$

и

$$\eta_i(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} (a_i(k) - a_{i-1}(k)) \quad (6)$$

Из (6) следует, что $a_i(k) = 0$ при $|k| \leq \frac{M_{i-1}}{2}$.

Другой вариант: выберем $a_0(k) = 0$,

$$a_i(k) = \prod_{\ell=1}^i a\left(\frac{k^{(\ell)}}{M_i}\right), \quad k = (k^{(1)}, \dots, k^{(3)}). \quad (6')$$

III. (Паули, Вилларс, Галлавотти и др.). $M_1 = m$, $\eta_0 = 0$,

$$\eta_i(k) = \frac{1}{(M_i^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(M_{i+1}^2 + k^2)^{1+\varepsilon}}, \quad i \geq 1. \quad (7)$$

IV. (α -представление). Пусть $\alpha_0 = \infty > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > 0$,

$$\eta_i(k) = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} e^{-\alpha(k^2 + m^2)} d\alpha, \quad \varepsilon = 0 \quad (8)$$

(оно используется в [22]).

Напомним еще раз, что поля $\xi_i(x)$ независимы для различных i , что следует из (2).

При $\varepsilon = 1$ или даже при $\frac{1}{2} < \varepsilon \leq 1$ U_Λ существует как случайная величина с конечной дисперсией, и достаточно доказать устойчивость. Мы докажем, что равномерно по N

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \leq C < \infty, \quad (9)$$

где

$$U_N \equiv U_{\Lambda, N} = \int : \xi_{\leq N}^4(x) : dx, \quad (10)$$

$$\xi_{\leq N}(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i(x),$$

причем здесь мы будем пользоваться разложением (5).

В этом параграфе мы дадим для случая $\varepsilon = 1$, соответствующего модели φ_4^4 , альтернативный метод доказательства устойчивости. Мы фактически докажем (9), а сходимость

$\langle e^{-U_N} \rangle_0$ при $N \rightarrow \infty$ доказывается аналогично.

Основная идея состоит в индуктивном применении формулы Тейлора

$$\langle Q e^{f(S_i)} \rangle = \langle Q e^{f(0)} \rangle + \langle Q S_i f'(S_i) e^{f(S_i)} \rangle, \quad 0 \leq \bar{S}_i \leq S_i \quad (11)$$

и $\exp(-U_N(S))$, где $S = (S_1, \dots, S_N)$ и

$$U_N(s) = \int_{\Lambda} \left(\sum_{i=1}^N s_i \xi_i(x) \right)^4 dx \quad (12)$$

На первом шаге $S_i = 1$. Применяя (11) для $i = N$, получим

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 = \langle e^{-U_{N-1}} \rangle_0 + \langle Q e^{-U_N(1,1,\dots,1,\bar{S}_N)} \rangle_0, \quad (13)$$

$$Q = -4 \int_{\Lambda} \xi_N(x) (\xi_1(x) + \dots + \xi_{N-1}(x) + \bar{S}_N \xi_N(x))^3 dx.$$

Оценка Вика дает для левой части (13)

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \leq e^{c_1 \varepsilon n^2 M_N} \quad (14)$$

Для правой части получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \langle e^{-U_{N-1}} \rangle_0 + \langle Q^2 \rangle_0^{1/2} \langle e^{-2U_N(1,\dots,1,\bar{S}_N)} \rangle_0^{1/2} &\leq \\ &\leq e^{c_1 \varepsilon n^2 M_{N-1}} + M_N^{-\varepsilon_0} e^{c_1 \varepsilon n^2 M_N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы видим, что оценка (15) лучше (14), и возникает идея применить разложение (11) много раз. При этом каждый раз мы будем иметь дело с выражениями вида

$$\mathcal{A} = Q \exp(-U_N(s)), \quad (16)$$

где $Q = \prod_{k,\alpha} Q_{k,\alpha}$, $Q_{k,\alpha} =$

$$= -4 \int_{\Lambda} \xi_k(x) \left(\sum_{i=1}^k s_i^{(k,\alpha)} \xi_i(x) \right)^3 dx \quad (17)$$

для некоторых $0 \leq s_i^{(\kappa, \omega)} \leq 1$.

Формально можно говорить о применении операторов I_i и P_i к \mathcal{A} ; действие I_i на \mathcal{A} состоит в том, что (только!) в экспоненте (16) s_i полагается равным 0, действие P_i соответствует второму члену в правой части (11).

Формально можно записать

$$1 = I_\kappa + P_\kappa, \quad I_\kappa^2 = I_\kappa, \quad P_\kappa I_\kappa = 0, \quad (18)$$

$$(I + P)^n = I + IP + \dots + IP^{n-1} + P^n,$$

где 1 означает тождественный оператор.

Мы рассмотрим $\exp(-U_N)$ как выражение \mathcal{A} с $Q=1$, $s_1 = \dots = s_N = 1$ и будем применять к нему по определяемым ниже правилам операторы $I_\kappa + P_\kappa$.

Сейчас рассмотрим для некоторых $m_\kappa \geq 0, \dots, m_N \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= P_\kappa^{m_\kappa} I_{\kappa+1} P_{\kappa+1}^{m_{\kappa+1}} \dots I_N P_N^{m_N} e^{-U_N} = \\ &= Q e^{-U_N(s_1, \dots, s_\kappa, 0, \dots, 0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для оценки сверху $|\langle \mathcal{A} \rangle_0|$ надо сначала избавиться от экспоненты, что достигается применением неравенства Шварца

$$|\langle Q e^{-U_N(s)} \rangle_0| \leq \langle Q^2 \rangle_0^{1/2} \langle e^{-2U_N(s)} \rangle_0^{1/2}. \quad (21)$$

При этом по оценке Бунка

$$\begin{aligned} \langle e^{-2U_N(s_1, \dots, s_\kappa, 0, \dots, 0)} \rangle_0^{1/2} &\leq \\ &\leq e^{c_1 \varepsilon n^2 M_\kappa} = M_\kappa^{c_1 \varepsilon n M_\kappa}. \end{aligned} \quad (21')$$

В разложении $\langle Q^2 \rangle_0$ по диаграммам в каждой диаграмме $2m_p$ p -вершин, $p = \kappa, \dots, N$. Поэтому каждая диаграмма оценивается сверху числом (аналогично лемме 2.3)

$$M_K^{-\varepsilon_0 2 m_K} \dots M_N^{-\varepsilon_0 2 m_N} \leq \quad (22)$$

$$\leq M_K^{-\varepsilon_0 S} \prod_{p=K}^N M_p^{-\varepsilon_0 m_p}, \quad S = m_K + \dots + m_N.$$

В то же время число диаграмм в разложении $\langle Q^2 \rangle$ оценивается сверху числом

$$(8S)^{8S}. \quad (23)$$

Окончательно

$$|\langle \mathcal{A} \rangle_0| \leq M_K^{c_1 \ln M_K - \frac{1}{2} \varepsilon_0 S} (8S)^{8S} \prod_{p=K}^N M_p^{-\frac{1}{2} \varepsilon_0 m_p}. \quad (24)$$

Мы опишем теперь правило построения урезанного разложения Тейлора. Мы начинаем с применения $I_N + P_N$. Получаем два слагаемых

$$I_N e^{-U_N} \quad \text{и} \quad P_N e^{-U_N}.$$

Во втором снова применяем $I_N + P_N$, а в первом — $I_{N-1} + P_{N-1}$, и так далее. Пусть мы уже получили слагаемое вида (19). Тогда как только впервые

$$S \geq c_2 M_K^{\varepsilon_1} \quad (25)$$

для этого слагаемого разложение останавливается. В противном случае снова применяется $I_K + P_K$. Разложение останавливается также, если для данного слагаемого $K=1$. Мы выбираем

$$M_K = M_{K-1}^{1+\tau} = M_1^{(1+\tau)^{K-1}}. \quad (26)$$

Тогда в момент остановки алгоритма либо

$$S = [c_2 M_K^{\varepsilon_1}] + 1, \quad (27)$$

либо

$$S \leq c_2 M_{k+1}^{\varepsilon_1}, \text{ но } S \geq c_2 M_k^{\varepsilon_1}, \quad \text{т.е.}$$

$$c_2 M_k^{\varepsilon_1} \leq S \leq c_2 M_k^{\varepsilon_1(1+\tau)}. \quad (28)$$

Мы выберем теперь $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малым в сравнении с ε_0 , $\tau < 1$ и $c_2 > 0$ достаточно большим. Тогда в момент остановки равномерно по всем слагаемым

$$M_k^{c_1 \ln M_k - \frac{1}{2} \varepsilon_0 S} (8S)^{8S} \leq \text{const}. \quad (29)$$

Тогда из (24) следует, что

$$Z_\Lambda = \sum | \langle \mathcal{A} \rangle_0 | \leq \leq \text{const} \prod_{p=2}^N (1 + M_p^{-\frac{1}{2} \varepsilon_0} + M_p^{-\frac{1}{2} 2 \varepsilon_0} + \dots) \leq \text{const}.$$

§6. КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ КЛЕТОК ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА: ОБЛАСТЬ $\varepsilon > \frac{1}{2}$, ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Как мы видели в §5 при разложении Тейлора каждая p -вершина дает малый множитель $M_p^{-\varepsilon_0}$ и для оценки выгодно набрать побольше таких множителей. Однако при увеличении числа вершин растет и число диаграмм. Поэтому алгоритм §5 неприменим при $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ (за исключением случая, когда ε близко к 1). Основной идеей Глимма-Джаффе является разбить не только импульсное пространство, но также и Λ на клетки и "сделать разложение Тейлора в каждой клетке". При этом оказывается, что поля в далеких (в смысле некоторого перенормированного масштаба) клетках почти независимы и спаривания между этими клетками можно не принимать во внимание, что существенно ограничивает рост числа диаграмм.

Фазовым пространством назовем $R^D \times R^D = \{(x, \kappa)\}$. Мы будем говорить, что поле $\xi_j(x)$ принадлежит клетке (i, Δ) фазового пространства, если $j = i$ и $x \in \Delta$, где

Δ - куб из R^3 .

Рассмотрим последовательность размельчающихся разбиений единичного куба Δ : первое разбиение состоит из одного единичного куба $\Delta_1 = \Delta$, K -е разбиение состоит из конгруэнтных непересекающихся кубов Δ_{ki} (K - номер разбиения или "ранг куба", $k=1, \dots, N$, i нумерует кубы данного разбиения в произвольном порядке). Если Δ_k - произвольный куб из Δ_{ki} , то

$$|\Delta_{ki}| = |\Delta_k| = 2^{-2n_k} = c_k M_k^{-2} \quad (1)$$

где целые $n_k > 0$ и числа c_k , $(\frac{1}{2})^{2n_k} \leq c_k \leq 1$, подбираются так, чтобы каждый куб Δ_k K -го разбиения являлся точным объединением кубов $(k+1)$ -го разбиения; M_k выбирается как в (5.26), $\tau > 0$ далее выбирается достаточно малым, а $M_1 = M_1(\tau)$ достаточно большим.

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 6.1.

При $\varepsilon > \frac{1}{2}$ статистические суммы Z_Λ конечны, а функции Швингера удовлетворяют первым двум аксиомам евклидовой теории поля.

Основную трудность представляет доказательство устойчивости. Исследование

$$\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} e^{-U_\Lambda} \rangle_0$$

вместе с доказательством аксиом проводится также с помощью построенного ниже разложения и предоставляется читателю.

Мы снова будем иметь дело с выражениями вида

$$\mathcal{A} = Q \exp \left(- \int \left(\sum_{e=1}^N \left[\prod_{k,i: x \in \Delta_{ki}} s_{eki} \chi_{\Delta_{ki}}(x) \right] \xi_e(x) \right)^4 dx \right), \quad (2)$$

где $0 \leq s_{eki} \leq 1$ - переменная, связанная с клеткой (e, Δ_{ki}) фазового пространства. Заметим, что $\exp(-U_N)$ имеет вид \mathcal{A} , если $Q \equiv 1$ и $s_{eki} \equiv 1$.

Мы будем использовать разложения Тейлора по s_{eki} ("разложение в клетке (e, Δ_{ki}) ") с остаточными членами. Заметим, что ряд Тейлора расходится. Интуитивно это ясно из того, что расходится ряд по λ для $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - \lambda x^4) dx$.

Поэтому необходима оценка остаточных членов. Члены разложения Тейлора мы оцениваем с помощью диаграмм, а при оценке экспоненты в остаточном члене используем также оценку Вика.

Аналогично предыдущему параграфу введем операторы I_α , P_α , где $\alpha = (e, \Delta_{ki})$ нумерует клетки.

Методологически полезно рассмотреть сначала упрощенные статистические суммы.

I. Рассмотрим "высокоимпульсную" часть" статсуммы

$$Z^{(N)} = \langle \exp(-U^{(N)}) \rangle_0, \quad (3)$$

$$U^{(N)} = \int \xi_N^4(x) dx,$$

и докажем, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$Z^{(N)} = 1 + O(M_N^{-\varepsilon_0/4}). \quad (4)$$

Пусть R - множество всех кубов Δ_{ki} для $k=1, \dots, N_0$ ($N_0 \leq N$ выбирается позднее) и всевозможных i . Подмножество $R' \subset R$ назовем допустимым, если вместе с некоторым $\Delta \in R'$ ему принадлежат все $\Delta' \supset \Delta$, $\Delta' \in R$. Имеет место тождество

$$Z^{(N)} = \langle \prod_{\Delta \in R} (I_\Delta + P_\Delta) \exp(-U^{(N)}) \rangle_0 = \sum_{R'} \theta_{R'}, \quad (5)$$

где сумма по всем допустимым R' , включая пустое, и

$$\theta_{R'} = \langle [\prod_{\Delta \in R'} I_\Delta] [\prod_{\Delta \in R'} P_\Delta] \exp(-U^{(N)}) \rangle_0, \quad (6)$$

где $P_\Delta = P_\alpha$ для $\Delta = \Delta_{ki}$, $\alpha = (N, \Delta_{ki})$ и аналогично определяется I_Δ . Порядок сомножителей в \prod_Δ таков: если $\Delta \subset \Delta'$, то множитель, соответствующий Δ , стоит левее множителя, соответствующего Δ' , а в остальном порядок произволен. Доказательство следует из формулы (5.18).

Лемма 6.1 (аналог кластерной оценки, см. [3], [18, 19]).

Существует ε_0 и $c > 0$ такие, что

$$|b_{R'}| \leq (cM_N^{-\varepsilon_0/2})^{|R'|} \quad (7)$$

Выведем сначала из этой леммы оценку (4).

Назовем куб $\Delta = \Delta_{ki} \in R'$ a -граничным, если существует цепочка кубов $\Delta \supset \Delta_{k+1, i_1} \supset \dots \supset \Delta_{k+b, i_b} \in R'$ для $b=a$, но не существует такой цепочки для $b=a+1$. Обозначим $R(\Delta; a)$ множество всех кубов $\Delta_{k+b, j} \in \Delta \equiv \Delta_{ki}$ с $b \leq a$. Заметим, что в каждом кубе Δ_{ki} содержится не более

$$\left(\frac{\text{const}}{|\Delta_{ki}|} \right)^{(1+\tau)^b - 1}$$

кубов $\Delta_{k+b, j}$. Поэтому для данного $\Delta = \Delta_{ki}$ существует не более

$$\prod_{l=0}^{a-1} \left(\frac{\text{const}}{|\Delta_{k+l, i_l}|} \right)^{\tau} \leq \left(\frac{\text{const}}{|\Delta_{ki}|} \right)^{\tau a (1+\tau)^a} \equiv \varphi(\Delta_{ki}) \quad (8)$$

таких цепочек длины a .

Нам понадобятся две оценки:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(\Delta) &\equiv \sum_{R'' \subset R(\Delta, a-1)} (cM_N^{-\varepsilon_0/2})^{|R''|} \leq \prod_{\Delta' \in R(\Delta, a-1)} (1 + cM_N^{-\varepsilon_0/2}) \leq \\ &\leq (1 + cM_N^{-\varepsilon_0/2})^{\varphi(\Delta)} \leq 1 + O(M_N^{-\varepsilon_0/4}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \varphi(\Delta) = \sum_{b=0}^{a-1} \left(\frac{\text{const}}{|\Delta|} \right)^{(1+\tau)^b - 1},$$

если $\tau = \tau(a, \varepsilon_0)$ достаточно мало;

2) Пусть \sum' - сумма по всем подмножествам $R'' \subset R(\Delta, a)$ таким, что существует цепочка $\Delta \equiv \Delta_{ki} \supset \Delta_{k+1, i_1} \supset \dots \supset \Delta_{k+a, i_a} \in R''$. Тогда аналогично (8)

$$\eta(\Delta) \equiv \sum' (c M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}})^{|R'|} \leq M_N^{-\frac{\varepsilon_0 a}{2}} \varphi(\Delta) (1 + c M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{4}}) \leq c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}, \quad (10)$$

если выбрать сначала a так, чтобы $\frac{\varepsilon_0 a}{2} \geq \gamma + \varepsilon_0$ и затем выбрать $\tau > 0$ достаточно малым в сравнении с ε_0 .
Докажем теперь, что

$$\sum_{R'} b_{R'} \leq f(\Delta_1) \sum_G \prod_{\Delta \in G} \eta(\Delta), \quad (11)$$

где сумма по всем подмножествам $G \subset R$.

Рассмотрим произвольное R' и сопоставим ему некоторое подмножество $G = G(R')$ a -граничных кубов. Если в R' нет a -граничных кубов, то G пусто. В противном случае возьмем первый (в некотором фиксированном порядке в R) a -граничный куб $\Delta^{(1)}$, далее в $R^{(1)} = R' - R(\Delta^{(1)}, a)$ выбираем первый a -граничный (по отношению к $R^{(1)}$) куб $\Delta^{(2)}$ и т.д. Получившийся набор кубов и есть G .

Очевидно, что

$$\sum_{R': G(R')=G} b_{R'} \leq f(\Delta_1) \prod_{\Delta \in G} \eta(\Delta). \quad (12)$$

Из (11) получаем

$$\begin{aligned} \sum b_{R'} &\leq f(\Delta_1) \prod_{\Delta \in R} (1 + c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}) \leq \\ &\leq f(\Delta_1) \prod_{k=1}^N (1 + c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}})^{\frac{1}{|\Delta_k|}}, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда и следует оценка (4).

Доказательство леммы 6.1.

Мы будем говорить, что применение P_Δ порождает P_Δ -вершину, т.е. множитель

$$Q_{\Delta} = -4\bar{S}'_{\Delta} \int : \xi_N^4(x) : dx \quad (14)$$

для некоторого $0 \leq \bar{S}'_{\Delta} \leq 1$. Иначе говоря, полагаем

$$\langle \prod_{\Delta \in R'} Q_{\Delta} e^{-U(\bar{S})} \rangle_0 = b_{R'} \quad (15)$$

для некоторого набора чисел $\bar{S} = (\bar{S}_{Nki})$. Так же как в (5.15), получаем

$$|b_{R'}| \leq \langle \prod_{\Delta \in R'} Q_{\Delta}^2 \rangle^{1/2} \langle e^{-2U(\bar{S})} \rangle_0^{1/2} \leq \langle \prod_{\Delta \in R'} Q_{\Delta}^2 \rangle^{1/2} C^M, \quad (16)$$

где M — число кубов $\Delta_{N_0 i} \in R'$, что следует из оценки Вика ($\Delta = \Delta_{N_0}$):

$$U_{\Delta} = \int_{\Delta} : \xi_N^4(x) : dx \geq -\text{const} |\Delta| M_N^{2-4\tilde{\epsilon}} \geq -\text{const}, \quad (17)$$

если

$$M_N^{2-4\tilde{\epsilon}} \leq C M_{N_0}^4, \quad \text{т.е., например, } N_0 = N - d_0, \quad (17')$$

где можно взять $d_0 = 2$

Для оценки

$$\langle \prod_{\Delta \in R'} Q_{\Delta}^2 \rangle_0$$

рассмотрим диаграммы для

$$\langle \prod_{\Delta \in \mathcal{D}} \int_{\Delta} : \xi_N^4(x) : dx \rangle_0, \quad (18)$$

где произведение берется по конечному набору \mathcal{D} кубов Δ . Эти кубы могут совпадать (в нашем случае не более чем дважды).

Пусть G — одна из таких диаграмм, L — множество ее ребер, L_0 — множество ребер ℓ таких, что перенормированное (скейлинговое) расстояние

$$d(\ell) = d_{N-1}(\Delta, \Delta') = \max [1, M_{N-1} \rho(\Delta, \Delta')] \quad (19)$$

между кубами Δ и Δ' , соединяемыми ребром ℓ , больше 1, т.е. если $\rho(\Delta, \Delta') > 0$, или если кубы не соседние. Это значит, что

$$d(\ell) \geq M_{N-1} M_{N_0}^{-1} \geq M_N^{\frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{(1+\tau)^{d_0}}} \quad (20)$$

Более общо, введем расстояние между клетками $(n, \Delta), (n, \Delta')$:

$$d_n(\Delta, \Delta') = \max [1, M_{n-1} \rho(\Delta, \Delta')], \quad (19')$$

и скейлинговое расстояние между точками:

$$d_n(x, x') = \max [1, M_{n-1} \rho(x, x')]. \quad (19'')$$

Лемма 6.2.

Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $n_0 > 0$ существует $c(n_0)$ такое, что каждая диаграмма G в разложении (18) допускает оценку

$$|I_G| \leq \left[\prod_{\ell \in L_0} c(n_0) d^{-n_0}(\ell) \right] (C M_{N-1}^{-\varepsilon_0})^{|L_1|}. \quad (21)$$

Доказательство леммы 6.2. Вынесем сначала

$$\inf \prod_{\ell \in L_1} \frac{1}{(p_\ell^2 + m^2)^{\xi/2}}$$

за знак интеграла. Это даст второй множитель в правой части (21). Рассмотрим часть интеграла (3.7), соответствующую ребру ℓ :

$$\int \frac{\exp[-i(p_\ell, x)] [a_N(p_\ell) - a_{N-1}(p_\ell)] dp_\ell}{(p_\ell^2 + m^2)^{3/2 + \xi/2}}, \quad (22)$$

где $x = x_{i(\ell)} - x_{j(\ell)}$.

Сделаем в нем замену $p_\ell = A p'_\ell$,

$$A = M_{N-1}.$$

Получим

$$\int \frac{\exp[-i(p'_e, Ax)] (a(\frac{p'_e}{M_{N-1}^{\tau}}) - a(p'_e)) A dp'_e}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}}, \quad (23)$$

где $\varepsilon' = \frac{1}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$. Если $\rho(\Delta, \Delta') > 0$, то проинтегрируем в (23) n_0 раз по частям, что и даст множитель

$c(n_0) |Ax|^{-n_0}$. После интегрирования по частям возникают (мы используем сглаженные $a_n(p)$, см. (5.6)) интегралы вида

$$C_{e,k,q}(x) = \int \exp[-i(p_e, x)] (a^{(k)}(\frac{p'_e}{M_1^{\tau(1+\tau), w-1}}) - a^{(k)}(p'_e)) \left(\frac{1}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}} \right)^{(q)} dp_e, \quad (24)$$

где (k) и (q) означают соответствующее число дифференцирований по p'_e . Нетрудно проверить, что равномерно по $k, q \leq n_0$ имеет место оценка

$$|C_{e,k,q}(x)| \leq \frac{c}{|x|^{1-\varepsilon}}. \quad (25)$$

Действительно, при $q \leq n_0$

$$\left(\frac{1}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}} \right)^{(q)} \leq \frac{\text{const}}{(p_e^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}}. \quad (26)$$

Отсюда и следует лемма 6.2.

Вернемся к доказательству леммы 6.1.

Для любых кубов Δ, Δ' обозначим (см. (21)) (27)

$$\varphi(\Delta, \Delta') = \begin{cases} c(n_0) d_N^{-n_0}(\Delta, \Delta'), & \text{если } d_N(\Delta, \Delta') > 1; \\ 1, & \text{если } d_N(\Delta, \Delta') = 1. \end{cases}$$

Мы выберем $n_0 \geq 5$. Тогда

$$\varphi(\Delta) = \sum_{\Delta'} \varphi(\Delta, \Delta') \leq \text{const},$$

где сумма по всем Δ' ранга, не большего ранга Δ . Последняя оценка следует из того, что число кубов Δ_{e_j} с $\ell \geq k$ и таких, что $\rho(\Delta_{e_j}, \Delta_{k_i}) = 0$ для фиксированного $\Delta_{k_i} = \Delta$, не превосходит

$$\text{const } k = \text{const} \frac{\ln \ln M_k - \ln \ln M_1}{\ln(1+\tau)}. \quad (28)$$

Суммирование диаграмм.

Любой отросток может быть спарен с любым при разложении (18). Если начинать со спаривания отростков максимального ранга, то ясно, что сумма диаграмм в (18) допускает оценку

$$\sum |I_G| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{D}} (8\varphi(\Delta))^4 (C M_{N-1}^{-2\varepsilon_0})^2, \quad (29)$$

если в каждой вершине 4 отростка и каждый куб Δ встречается в \mathcal{D} не более чем дважды.

II. Рассмотрим теперь

$$Z_{\Lambda}^{(N,1)} = \langle \exp(-\int :(\xi_1(x) + \xi_N(x))^4: dx)_0, \quad (30)$$

т.е. $s_{\ell, k, i} \equiv 0$, если $1 < \ell < N$. Будем считать также $s_{1, k, i} \equiv 1$ и положим $s_{N, k, i} = s_{k_i} = s_{\Delta}$,

$\Delta = \Delta_{k_i}$. Мы снова используем формулы (5), (6) для Z_{Λ} . Множитель, соответствующий P_{Δ} -вершине, теперь имеет вид

$$Q_{\Delta} = -4s \int :(\xi_1(x) + \bar{s} \xi_N(x))^3 \xi_N(x): dx. \quad (31)$$

Новая трудность: "моды" ξ_1 и ξ_N перемешаны во взаимодействии, и если спаривать в диаграммах все случайные величины (в том числе и $\xi_1(x)$), то возникает некомпенсируемый комбинаторный множитель, так как $\langle \xi_1(x) \xi_1(y) \rangle$ плохо убывает с ростом $|x-y|$. Для ее преодоления $\xi_1(x)$ разбивается на среднее поле, подавляемое экспонентой, и имеющее лучшее убывание по $|x-y|$ поле. Сейчас мы подробно опишем этот прием, являющийся основным в ренормгрупповой идеологии этой задачи.

Для любого поля $\eta(x)$ и любого куба Δ обозначим, $x \in \Delta$,

$$\bar{\eta}_\Delta = \frac{1}{|\Delta|} \int \eta(x) dx, \quad (\delta_\Delta \eta)(x) = \eta(x) - \bar{\eta}_\Delta(x). \quad (32)$$

По неравенству Гельдера (с $p = \frac{4}{3}, q = \frac{4}{1}$)

$$\bar{\eta}_\Delta^4 \leq \frac{1}{|\Delta|} \int \xi^4(x) dx. \quad (33)$$

Перепишем (31) в виде

$$Q_\Delta = -4s \int_\Delta \xi_N(x) (\bar{\eta}_\Delta + \delta_\Delta \eta(x))^3 dx, \quad (34)$$

где

$$\eta(x) = \xi_1(x) + \bar{\xi} \xi_N(x).$$

После раскрытия скобок под знаком интеграла в (34) мы получим члены вида

$$:\xi_N \bar{\eta}^3:, : \xi_N \bar{\eta}^2 \delta \eta :, : \xi_N \bar{\eta} (\delta \eta)^2 :, : \xi_N (\delta \eta)^3 :. \quad (35)$$

В каждом из них, кроме последнего, избавимся частично от виковских точек, избегая спариваний $\langle \xi_N \delta \eta \rangle, \langle (\delta \eta)^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} :\xi_N \bar{\eta}^3: &= \xi_N \bar{\eta}^3 - 3 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \bar{\eta}^2 - 3 \xi_N \bar{\eta} \langle \bar{\eta}^2 \rangle + 3 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \langle \bar{\eta}^2 \rangle; \\ :\xi_N \bar{\eta}^2 \delta \eta: &= \xi_N \delta \eta : \bar{\eta}^2 - : \xi_N \delta \eta : \langle \bar{\eta}^2 \rangle - 2 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \bar{\eta} \delta \eta - \\ &- 2 \langle \bar{\eta} \delta \eta \rangle \xi_N \bar{\eta} + 2 \langle \xi_N \eta \rangle \langle \eta \delta \eta \rangle; \end{aligned} \quad (36)$$

$$:\xi_N \bar{\eta} (\delta \eta)^2: = : \xi_N (\delta \eta)^2 : \bar{\eta} - : (\delta \eta)^2 : \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle - 2 \langle \bar{\eta} \delta \eta \rangle : \xi_N \delta \eta :.$$

Мы используем следующее неравенство

$$|y|^K \leq K^K e^{y^2}, \quad K=1,2,3. \quad (37)$$

А именно, для некоторого $\varepsilon_2 > 0$

$$\left(\Delta^{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{4}} \bar{\eta}\right)^{4 - \frac{K}{4}} \leq \left(\frac{K}{4}\right)^{\frac{K}{4}} e^{\Delta^{1 + \varepsilon_2} \bar{\eta}^4} \leq e^{\Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx} \quad (38)$$

виду (33). Иначе говоря,

$$\bar{\eta}^K \leq \text{const } \Delta^{-\frac{K}{4}(1 + \varepsilon_2)} e^{\Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx} \quad (39)$$

После применения формулы (5) экспонента в каждом члене имеет вид

$$\exp\left(-\sum_{\Delta}' \int_{\Delta} (\xi_1(x) + S_{\Delta} \xi_N(x))^4 dx\right), \quad (40)$$

где сумма по всем $\Delta \in R^1$ ранга N_0 и S_{Δ} — некоторые числа, $0 \leq S_{\Delta} \leq 1$. Мы будем говорить, что формулы (36) разбивают каждую P_{Δ} — вершину на конечное число $P_{\Delta, \beta}$ — вершин. Для дальнейшего сравнения с экспонентой нам нужна несколько более общая процедура. Сначала P_{Δ} — вершину преобразуем так:

$$Q = -4s \int_{\Delta} \xi_N(x) (\xi_1(x) + \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta}^{N_0} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x) \xi_N(x) + (\bar{s} - \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta}^{N_0} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x)) \xi_N(x))^3 dx, \quad (41)$$

где $f_{\Delta'}(x)$ — характеристическая функция множества Δ' , Δ' имеют ранг N_0 .

Далее, обозначая

$$\eta(x) = \xi_1(x) + \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta}^{N_0} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x) \xi_N(x) \quad (42)$$

и раскрывая в (41) скобки, мы получим новые множители вида

$$s^k \int_{\Delta} \xi_N^K \eta^{4-K}(x) dx, \quad K=1,2,3,4. \quad (43)$$

Если $k = 4$, мы не применяем разбиения (36), если $k = 2, 3$, то поступаем аналогично случаю $k = 1$. Далее при обсуждениях будем иметь в виду (самый неприятный) случай $k = 1$.

Изменим несколько процедуру применения неравенства Шварца в (16): отнесем все множители $\bar{\eta}_\Delta^k$ к экспоненте. Тогда из (40) и (39) мы видим, что вторые множители при применении неравенства Шварца оцениваются сверху выражением

$$\langle \exp(-2 \sum_{\Delta}^{N_0} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx + 2 \sum_{\Delta \in R^1} \Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx) \rangle_0, \quad (44)$$

где первая сумма - по всем Δ ранга N_0 , а вторая - по всем $\Delta \in R^1$. Но

$$2 \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta} (\Delta')^{\varepsilon_2} \int_{\Delta'} \eta^4(x) dx \leq \frac{3}{2} \sum_{\Delta}^{N_0} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx,$$

и выкладка, аналогичная оценке Вика (2.19), показывает, что (44) оценивается сверху C^M как в (16).

Множители $\Delta^{-\frac{k}{4}(1+\varepsilon_2)}$ мы отнесем к первому множителю, а точнее, к соответствующей $P_{\Delta, \beta}$ -вершине. Таким образом, мы полностью устранили экспоненту и все множители $\bar{\eta}$: вместо экспоненты остался множитель C^M , а вместо каждого $\bar{\eta}$ - расходящийся множитель $\Delta^{-1/4(1+\varepsilon_2)}$ в каждой $P_{\Delta, \beta}$ -вершине.

Далее так же, как в случае 1, возникает сумма диаграмм.

Наша цель - доказать оценку

$$Z^{(N,1)} = C + O(M_N^{-\varepsilon_0/4}), \quad (45)$$

где

$$C = \langle \exp(- \int_{\Delta_1} \xi_1^4(x) dx) \rangle_0.$$

Это будет снова следовать из леммы 6.1, верной для непустых $R^1(b_{\mathcal{R}} = C)$.

Как видно, мы везде используем

Комбинаторные алгоритмы с диаграммами.

Скажем о них несколько слов с общей точки зрения.

Мы будем рассматривать суммы вида

$$\sum_G \langle I_G \rangle, \quad (46)$$

где G - обобщенные диаграммы, а I_G имеет вид (2.14).

Отростки каждой обобщенной диаграммы мы будем отождествлять с соответствующими случайными величинами. С выражениями (46) мы будем производить элементарные операции, переводящие выражения (46) в такие же:

1. Разложение отростка. Выберем одну из диаграмм G и один из ее отростков. Соответствующую ему случайную величину ξ представим в виде

$$\xi = \xi' + \xi'' \quad (47)$$

Тогда будем говорить, что из G получились две диаграммы G' и G'' : обе имеют вид G , но в первой из них выбранному отростку соответствует ξ' , во второй - ξ'' .

2. Спаривание отростка. Выберем G и в ней отросток. Спарим его с каждым из других свободных отростков других вершин диаграммы G . Тогда

$$I_G = \sum_{G'} I_{G'} \quad (48)$$

где G' получаются из G спариванием выбранного отростка с произвольным из отростков другой вершины.

При подобных операциях число членов суммы (46) растет. Для учета удобен язык комбинаторных множителей, сводящийся к неравенству (α - некоторый класс диаграмм):

$$\sum_{G \in \alpha} |I_G| \leq \left(\sum_{G \in \alpha} c(G)^{-1} \right) \sup (c(G) \langle I_G \rangle) \leq$$

$$\leq \sup_{G \in \alpha} (c(G) \langle I_G \rangle), \quad (49)$$

если только

$$\sum_G c^{-1}(G) \leq 1. \quad (50)$$

Числа $c(G)$, называемые комбинаторными множителями, подбираются так, чтобы они записывались какими-либо малыми

множителями, возникающими при оценке $\langle I_G \rangle$.

Например, в случае 1) можно положить

$$c(G') = c(G'') = 1$$

и

$$| \langle I_G \rangle | \leq 2 \max(| \langle I_{G'} \rangle |, | \langle I_{G''} \rangle |).$$

Более общо, комбинаторным множителем может быть число A членов в сумме (49), т.е. $c(G) \equiv A$. Иногда надо один из множителей $c(G')$ выбрать большим, а другой — близким к 1. Имея это в виду, мы далее часто будем опускать подобные оценки, если они очевидны.

Вернемся к нашим диаграммам. В них будут $\delta\eta$ -отростки и петли из (36) вида $\langle \xi_N \bar{\eta} \rangle, \langle \bar{\eta}^2 \rangle, \langle \bar{\eta} \delta\eta \rangle$.

Нам понадобится ряд простых оценок. Сначала такой же выкладкой, как в лемме 6.2, получим (не выделяя сначала $\tilde{\epsilon}/2$)

$$| \langle \xi_N(x) \xi_N(y) \rangle | \leq c(n_0) d_N^{-n_0}(x, y) M_N^{1-2\tilde{\epsilon}} \quad (51)$$

Отсюда получаем оценки петель ($x \in \Delta$) : каждая из них, т.е.

$$| \langle \xi_N(x) \bar{\eta}_\Delta \rangle |, | \langle \bar{\eta}_\Delta^2 \rangle |, | \langle \bar{\eta}_\Delta \delta\eta \rangle |,$$

не превосходит

$$C M_N^{1-2\tilde{\epsilon}} \frac{|\Delta_{N-1}|}{|\Delta|} \quad (52)$$

Представим каждый $\delta\eta$ -отросток в виде суммы двух отростков

$$\delta\eta = \delta\eta_1 + \delta\eta_N, \quad \eta_1 = \xi_1, \quad \eta_N = \eta - \xi_1. \quad (53)$$

Эти отростки мы будем называть низкоимпульсными и высокоимпульсными соответственно. Каждая вершина имеет, таким образом,

$4-k \leq 4$ отростков, из них $k_N \geq 1$ высокоимпульсных, $k_e = 4-k-k_N$ — низкоимпульсных.

В каждой диаграмме мы оцениваем по абсолютной величине каждую петлю посредством (52) и каждое низкоимпульсное спаривание посредством

$$| \langle \delta_\Delta \eta_1(x) \delta_{\Delta'} \eta_1(y) \rangle | \leq C |\Delta|^{1/4} |\Delta'|^{1/4} \quad (54)$$

Докажем (54). Для этого оценим для любого n

$$\begin{aligned}
 & |(\xi_n(x_1) - \xi_n(x_1 + \varepsilon_1))(\xi_n(x_2) - \xi_n(x_2 + \varepsilon_2))| = \\
 & = \left| \int e^{i(x_1 - x_2, \kappa)} [1 - e^{-i(\varepsilon_1, \kappa)} - e^{i(\varepsilon_1, \kappa)} + e^{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \kappa)}] d\kappa \right| \leq \\
 & \times (a_n(\kappa) - a_{n-1}(\kappa)) (\kappa^2 + m^2)^{-(\frac{3}{2} + \tilde{\varepsilon})} d\kappa \leq \quad (55) \\
 & \leq |\varepsilon_1 \varepsilon_2| \left| \int \frac{\kappa^2 e^{i(x_1' - x_2', \kappa)}}{(\kappa^2 + m^2)^{3/2 + \tilde{\varepsilon}}} (a_n - a_{n-1}) d\kappa \right| \leq \\
 & \leq |\varepsilon_1 \varepsilon_2| c(n_0) d_n^{-n_0}(x_1, x_2) M_N^{3-2\tilde{\varepsilon}},
 \end{aligned}$$

где $x_i' = x_i + \varepsilon_i'$, $|\varepsilon_i'| \leq |\varepsilon_i|$.

Отсюда легко следует (54), если положить

$$n=1, \quad n_0=0, \quad \varepsilon_1 = |\Delta|^{1/4}, \quad \varepsilon_2 = |\Delta|^{1/4}.$$

После разложения отрезков каждый $b_{R'}$ оказывается представимым в виде суммы

$$b_{R'} = \sum_{\gamma} b_{R', \gamma}. \quad (56)$$

Зафиксируем $b_{R', \gamma}$ и спарим все низкоимпульсные отрезки.

Докажем, что число всевозможных спариваний не превосходит

$$N_1^F \prod_{e=1}^{N_1} F_e (F_e - 2)(F_e - 4) \dots, \quad (57)$$

где $N_1 = N_1(R', \gamma)$ - максимальный ранг кубов для данных R' и γ

$F_e = \sum_{e=1}^{N_1} F_{e, \delta \rho}$,
 F_e - число всех Δ ранга e - отрезков из всех $P_{\Delta, \beta}$ - вершин для кубов

Действительно, упорядочим произвольно все кубы. Возьмем первый куб максимального ранга и спарим его с произвольным кубом некоторого ранга K . При этом возникает комбинаторный множитель $N_1 \cdot F_K$. Далее возьмем первый из оставшихся кубов ранга K и с ним сделаем ту же процедуру и т.д.

Множитель

$$N_1^F = (C \ln \ln F_N)^F$$

мы запомним. Он забудется далее множителями $(M_N^{-\varepsilon_0})^D$, где D - число вершин. Далее,

$$F_e \leq \frac{C}{|\Delta_e|}$$

и с учетом (54) мы получим расходящийся множитель $C/|\Delta|^{-1/4}$ на каждый $\delta \varphi$ - отрезок. Таким образом, окончательно имеем средние вида

$$\left\langle \prod_{\Delta \in D} \left[\left(\int_{\Delta} \xi_N^K(x) dx \right) \Delta^{-\frac{K-K}{4} - \varepsilon_2} \right] \right\rangle, \quad (58)$$

где $K = K(\Delta)$ может быть равным 1, 2, 3, 4.

Возможен также случай, когда $K = 0$, т.е. в соответствующей $P_{\Delta, \beta}$ -вершине две петли. Тогда интегрирование

$\int_{\Delta} dx$ в этой вершине с учетом (52) дает множитель

$$C M_N^{2(1-2\tilde{\varepsilon})} |\Delta_{N-1}|^{\frac{1}{|\Delta_{N-1}|}} \leq C M_N^{-\varepsilon_0} \quad (59).$$

на эту вершину.

Пусть теперь все $K_{\Delta} \geq 1$. Тогда мы поступаем как в доказательстве леммы 6.2. Однако после выделения множителей

$$C(h_0) d_N^{-h_0}$$

мы поступим несколько иначе. А именно, используем лемму 3.1, а в качестве разбиения диаграммы возьмем разбиение на отдельные вершины. При этом получим дополнительный множитель

$$\prod_{\Delta} \left| \left\langle \iint_{\Delta \Delta} C_{\max}^{K_{\Delta}}(x-y) dx dy \right\rangle_0 \right|^{1/2} \leq$$

$$\leq C |\Delta|^{1/2} |\Delta|^{1/2} \cdot \frac{1}{4} (4 - K_A (1 - \tilde{\epsilon})), \quad (60)$$

где C_{max} - общая мажоранта всех $C_{e,k,q}(x-y)$ из (25).
С учетом (58) мы получим множитель на каждую вершину,
равный

$$C \Delta^{-\frac{4-K_A}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{K_A}{8} (1 - \tilde{\epsilon})} = C \Delta^{\frac{K_A}{8} + \frac{\tilde{\epsilon}}{8} - \epsilon_2}. \quad (61)$$

Нам достаточно того, что он не превосходит константы. Поэтому и в нашей ситуации верна лемма 6.2, откуда и следует устойчивость статсуммы.

§ 7. ОБЛАСТЬ $\epsilon > \frac{1}{2}$: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Для рассмотрения общего случая фактически не надо никаких новых идей: мы просто используем все, что узнали в предыдущем параграфе, и немного обобщим.

Итак, мы рассматриваем выражение (6.2), начиная с $Q \equiv 1$
 $S_{e,k_i} \equiv 1$. Вместо (6.5) мы будем использовать тождество

$$Z_\Lambda = \langle \prod_{\alpha \in R} (I_\alpha + P_\alpha) \exp(-U_N) \rangle_0 = \sum_{R'} \theta_{R'}, \quad (1)$$

где теперь под R будем понимать множество всех клеток
 $(\ell, \Delta_{k_i}) = \alpha$ таких, что $k \leq \ell - d_0$. В множестве клеток введем частичное упорядочивание:

$$\alpha = (\ell, \Delta_{k_i}) < \alpha' = (\ell', \Delta_{k'_i}),$$

если либо $k < k'$, либо $k = k'$ и $\ell > \ell'$. Мы считаем в (1), что если $\alpha > \alpha'$, то $I_\alpha + P_\alpha$ стоит правее $I_{\alpha'} + P_{\alpha'}$. В остальном порядок произволен. R расслаивается $R = \cup R_e$ на множестве R_e "кубов":

$$R_e = \{\Delta_{k_i} : k \leq \ell - d_0\} \simeq \{(\ell, \Delta_{k_i}) : k \leq \ell - d_0, \text{фиксир.}\}$$

Подмножество $R' \subset R$ назовем допустимым, если $R' \cap R_e$ допустимо в прежнем смысле для всех e .

В двух словах: мы применяем прежнюю процедуру для каждого "слоя импульсов" (M_{e-1}, M_e) .

Формула (6.6) для всех $b_{R'}$ сохраняется.

Лемма 7.1.

Существует $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$|b_{R'}| \leq \prod_{\ell} (C M_{\ell}^{-\varepsilon_0/2})^{1R' \cap R_{\ell}} \quad (2)$$

Доказательство устойчивости, исходя из леммы 7.1, такое же, как раньше, если применить его (последовательно) для каждого ℓ . Нам остается доказать лемму 7.1.

Множитель, соответствующий P_{α} -вершине, $\alpha = (\ell, \Delta_{ki})$, имеет вид

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(R') = -4\bar{s}_{\alpha} \int_{\Delta_{ki}} \xi_{\ell}(x)(w_{\alpha}(x) + h_{\alpha}(x))^3 dx, \quad (3)$$

где

$$w_{\alpha}(x) = s_1^{(\alpha)} \xi_{\Delta_1}(x) + \dots + s_{k+d_0-1}^{(\alpha)} \xi_{k+d_0-1}(x),$$

$$h_{\alpha}(x) = \bar{s}_{k+d_0}^{(\alpha)} \xi_{k+d_0}(x) + \dots + \bar{s}_N^{(\alpha)} \xi_N(x)$$

называются соответственно низкоимпульсным (плохо локализованным) и высокоимпульсным (хорошо локализованным) полями.

При этом также ξ_{ℓ} хорошо локализовано (т.е. $\ell \geq k+d_0$).

Таким образом,

$$b_{R'} = \left[\prod_{\alpha \in R'} Q_{\alpha} \right] \exp \left[- \sum_j \int_{\Delta_{Nj}} \left(\sum_{m=1}^N s_{mNj} \xi_m(x) \right)^4 dx \right]. \quad (4)$$

Очень важно при этом, что

$$s_{mNj} = s_m^{(\alpha)}, \quad (5)$$

если $\alpha = (\ell, \Delta_{ki})$, $\Delta_{Nj} \subset \Delta_{ki}$ и $m \leq k-1+d_0$.

Это следует из нашего упорядочения клеток: если уже сделаны все разложения в кубах ранга $k-1$ и меньшего ранга, то разложения в импульсных слоях "ранга" $m \leq k-1+d_0$ не

делаются. Это позволяет использовать процедуру предыдущего параграфа: ввести поля ($\alpha = (\ell, \Delta_{ki})$)

$$\varphi_{\alpha}(x) = w_{\alpha}(x) + \sum_{m=k+d_0}^N \sum_j s_{mNj} f_{\Delta_{Nj}}(x) \xi_m(x), \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_{\alpha} = \frac{1}{|\Delta_{ki}|} \int_{\Delta_{ki}} \varphi_{\alpha}(x) dx, \quad \delta \varphi_{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x) - \bar{\varphi}_{\alpha}.$$

Тогда

$$Q_{\alpha} = -4 \bar{s}_{\alpha} \int_{\Delta_{ki}} \{ \xi_e(x) (\bar{\varphi}_{\alpha}) + \delta_{\alpha} \varphi(x) + \sum_{m=k+d_0}^N s_m(x) \xi_m(x) \}^2 dx, \quad (7)$$

$$s_m(x) = \sum_j (-f_{\Delta_{Nj}}(x) s_{mNj}) + \bar{s}_m^{(\alpha)}.$$

Далее, действуя в точности как в §6, исключаем все $\bar{\varphi}_{\alpha}$, получая вместо каждого из них расходящийся множитель

$$|\Delta_{ki}|^{-1/4(1+\varepsilon_2)}$$

Разберемся теперь, какие петли и отростки будут в получившихся после устранения экспоненты диаграммах. Так же как и раньше, петли будут

$$\begin{aligned} | \langle \xi_e(x) \bar{\varphi}_{\alpha} \rangle | &\leq C M_e^{1-2\tilde{\varepsilon}} \frac{|\Delta_e-1|}{|\Delta_{ki}|}, \\ \langle \bar{\varphi}_{\alpha}^2 \rangle &\leq \sum_{z=k+d_0}^N C M_z^{1-2\tilde{\varepsilon}} \frac{|\Delta_z-1|}{|\Delta_{ki}|} \leq C M_{k+d_0}^{1-2\tilde{\varepsilon}}, \quad (8) \\ | \langle \bar{\varphi}_{\alpha} \delta \varphi_{\alpha} \rangle | &\leq C M_{k+d_0}^{1-2\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Нам достаточно гораздо более грубой оценки сверху

$$|\Delta_k|^{-\frac{1}{2} + \varepsilon_0}$$

для каждой петли. Поэтому оценки с петлями такие же, как в §6.

Разбиваем каждый $\delta\varphi_\alpha$ -отросток на низкоимпульсные $\delta\varphi_{\alpha,i}$, $i=1, \dots, k+d_0-1$, и высокоимпульсные $\delta\varphi_{\alpha,i}$ -отростки, $i=k+d_0, \dots, N$. Высокоимпульсные отростки мы трактуем наравне с ξ_j -отростками, $j=k+d_0, \dots, N$, используя их для окончательной оценки. Каждое низкоимпульсное спаривание мы оцениваем, снова используя (6.55)

$$|\langle \delta\varphi_{\alpha,n}(x) \delta\varphi_{\alpha',n}(y) \rangle| \leq |\Delta|^{1/4} |\Delta'|^{1/4} c(n_0) d_n^{-n_0}(\Delta, \Delta') M_n^{3-2\tilde{\varepsilon}}, \quad (10)$$

если $\alpha = (m, \Delta)$, $\alpha' = (m, \Delta')$. Учитывая множи-

тель $d_n^{-n_0}(\Delta, \Delta')$ в (10) мы видим, что комбинаторный

множитель $F_e = \frac{c}{|\Delta_e|}$ переходит в множители $F_{e,n}$,

$$F_{e,n} \leq \frac{c |\Delta_{n-1}|}{|\Delta_e|} \quad - \text{числа всех } \delta\varphi_{\alpha,n} -$$

отростков из всех P_α -вершин, $\alpha = (z, \Delta)$, для кубов Δ ранга ℓ . Снова имеем оценку

$$N_1^{\sum F_{e,n}} \prod_{\ell=1}^{N_1} \prod_{n \leq \ell + d_0} F_{e,n} (F_{e,n-2}) (F_{e,n-4}) \dots \quad (11)$$

Поэтому на каждый $\delta\varphi_{\alpha,n}$ -отросток, $\alpha = (m, \Delta)$ имеем множитель

$$|\Delta_e|^{-1/4} M_n^{3-2\tilde{\varepsilon}} |\Delta_{n-1}| \leq |\Delta_e|^{-1/4} M_n^{-\varepsilon_0}. \quad (12)$$

Далее все так же, как в конце §6.

§8. ФОРМАЛЬНЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

В области $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$
 $\langle U_N \rangle_0 = 0$, $\langle U_N^2 \rangle_0 \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$,

но семинварианты $\langle U_N^n \rangle_0$ остаются конечными при $N \rightarrow \infty$, если $n \geq 3$, так как только одна диаграмма (связная) расходится, а именно, диаграмма



Поэтому случайная величина $U_N / \langle U_N^2 \rangle_0^{1/2}$ асимптотически нормальна при $N \rightarrow \infty$, так как ее семинварианты

$$\frac{1}{\langle U_N^2 \rangle_0^{n/2}} \langle U_N^n \rangle_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Отсюда очевидно, что

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \rightarrow \infty \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В следующем параграфе мы докажем

Теорему 8.1.

При $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ перенормированная статистическая сумма, т.е.

$$Z_N^{ren} \equiv \langle e^{-U_N - E_N} \rangle_0$$

устойчива, если

$$E_N = \frac{1}{2} \bigcirc \equiv \frac{1}{2} 4! \int_{\wedge} C_N^4(x-y) dx dy = \frac{1}{2} \left\langle \int_{\wedge} \Xi_{\leq N}^4(x) :: \Xi_{\leq N}^4(y) :: \right\rangle_0 dx dy.$$

Необходимо как-то изменить взаимодействие, чтобы обеспечить устойчивость статистической суммы и конечность функций Швингера при сохранении свойства OS-положительности. Предписание, как это сделать, дает формальная теория перенормировок. В ней рассматриваются формальные ряды по параметру λ для

$$Z = \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

$$\ln Z_N = \ln \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n,$$

$$\langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k) \rangle_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f_1, \dots, f_k) \lambda^n. \quad (1)$$

Здесь

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \langle U_N^n \rangle_0, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!} \langle U_N'^n \rangle_0 -$$

n -й семинвариант U_N ,

$$c_n(f_1, \dots, f_k) = \frac{(-1)^n}{n!} \langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k), U_N'^n \rangle_0.$$

(о семинвариантах и обозначениях см. [19]).

Взаимодействие U_N заменяется на перенормированное взаимодействие $U_N^{ren} = U_N^{ren}(\lambda)$, являющееся многочленом по λ (или в общем случае — формальным рядом по λ) такое, что для следующих формальных рядов

$$\langle e^{-U_N^{ren}(\lambda)} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{ren} \lambda^n,$$

$$\ln \langle e^{-U_N^{ren}(\lambda)} \rangle_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{ren} \lambda^n,$$

$$\frac{\langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k) \exp(-U_N^{ren}(\lambda)) \rangle_0}{\langle \exp(-U_N^{ren}(\lambda)) \rangle_0} = \quad (2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n^{ren}(f_1, \dots, f_k),$$

каждый член $a_n^{ren}, b_n^{ren}, c_n^{ren}(f_1, \dots, f_k)$ имеет конечный предел при $N \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала случай, когда только вакуумные диаграм-

мы расходятся. В случае $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$U_N^{ren} = \lambda U_N + \lambda^2 E_N, \quad E_N = \frac{1}{2} \langle U_N^2 \rangle_0.$$

В общем случае также достаточно добавить к взаимодействию некоторую зависящую от N константу (точнее, формальный ряд по λ с постоянными, зависящими от N коэффициентами).

Утверждение 8.1.

Пусть даны числа $E_n^{(N)}$ такие, что при всех n

$$b_n^{(N)} = (-1)^n \langle U_N^{ren} \rangle_0 - E_n^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b_n^{ren}, \quad (3)$$

$$|b_n^{ren}| < \infty.$$

Положим

$$U_N^{ren} = \lambda U_N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E_n^{(N)}. \quad (4)$$

Тогда все члены в правых частях (2) имеют конечный предел при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство.

$$\ln \langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_0 = \ln \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E_n^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} b_n^{ren}. \quad (5)$$

Поэтому

$$\langle e^{-U_N^{ren}} \rangle_0 \rightarrow \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} b_n^{ren}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\alpha} b_{n_1}^{ren} \dots b_{n_k}^{ren}, \quad (6)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ на блоки T_i с $|T_i| = n_i$.

Третий ряд в (2) не меняется при такой перенормировке. Каждый член первоначального ряда имеет конечный предел, так как все (невакуумные) диаграммы сходятся.

Замечание 8.1.

Может показаться, что ввиду последнего факта можно вообще не делать перенормировок. Однако, метод доказательства теоремы 8.1 (см. ниже §9) требует такой перенормировки.

В случае квадратичного взаимодействия

$$U_N = \int_1 : \xi_{\leq N}^2(x) : dx$$

необходимость перенормировки при $\nu \geq 4$ связана, очевидно, с сингулярностью гауссовских мер μ_0 и $\mu_\Lambda \uparrow R$ (еще до термодинамического предельного перехода).

Мы переходим теперь к общему случаю.

Напомним, что с каждой диаграммой G связывается функция

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_e C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}).$$

Пусть каждому $V \subset \{1, \dots, n\}$ поставлено в соответствие целое число $\alpha_V \geq 0$. Для любого набора $\alpha = \{\alpha_V\}$, где V пробегает непустые подмножества $\{1, \dots, n\}$, обозначим через $S(\alpha)$ подпространство пространства Шварца $S(R^n)$ функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что для любого $V = \{i_1, \dots, i_k\}$ все производные порядка $\leq \alpha_V$ равны нулю на плоскости $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$.

Трудности с ультрафиолетовыми расходимостями состоят фактически в том, что $G(x_1, \dots, x_k)$ не является обобщенной функцией умеренного роста, т.е. не для всех $f \in S(R^n)$

$$\int_{R^n} G f dx_1 \dots dx_k$$

конечен. Однако имеет место

Утверждение 8.2.

Существует набор $\alpha = \{\alpha_V\}$, $\alpha_V < \infty$, такой, что интеграл (7) конечен для всех $f \in S(\alpha)$.

Это следует из теоремы счета степеней.

Мы покажем, что перенормировка взаимодействия связана с продолжением линейного функционала (7) с $S(\alpha)$ на $S(R^n)$.

Расходимость массовых диаграмм.

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (Эквивалентный φ_3^4). В этом примере расходятся только диаграммы

$$G_1 = \text{bubble}, \quad G_2 = \text{triangle}, \quad G_3 = -\text{self-energy}.$$

Заметим, что в ранее рассмотренном случае замена $U \rightarrow U^{ren}$ приводила к следующему эффекту: в каждом члене рядов (1) все диаграммы, содержащие расходящиеся вакуумные диаграммы



обращались в нуль. Такой эффект называется перенормировкой членов ряда (диаграмм) или R -операцией. Иначе говоря, например, $Ra = a^{ren}$.

Определим теперь R -операцию для случая $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Для каждой диаграммы R -операция состоит в замене

$$G(x_1, \dots, x_n) \text{ на другую функцию} \\ (RG)(x_1, \dots, x_n) = G^{ren}(x_1, \dots, x_n).$$

Это делается по следующим правилам:

1. Каждая вакуумная диаграмма, изоморфная G_1 или G_2 , заменяется на 0, т.е. если в G есть связанная компонента, изоморфная G_1 или G_2 , то $RG = 0$.

2. Для любой массовой поддиаграммы, изоморфной G_3 с вершинами $i_1, i_2, i_1 < i_2$, множитель $C(x_{i_2} - x_{i_3})$, соответствующий внешнему ребру этой поддиаграммы, выходящему из вершины i_2 , заменяется на

$$C(x_{i_2} - x_{i_3}) - C(x_{i_1} - x_{i_3}).$$

Иначе говоря, диаграмма



заменяется на разность



(вычитается "головастик").

В этом же случае перенормированное взаимодействие вводится

так:

$$U_{\text{св}}^{\text{ren}} = \underbrace{\lambda U_{\text{св}} + \lambda^2 E_2 - \lambda^3 E_3}_{\text{вакуумные контрчлены}} - \underbrace{\lambda^2 M}_{\text{массовый контрчлен}},$$

$$E_2 = E_2(\lambda, \Lambda) = \frac{1}{2} \langle \int_{\Lambda} : \xi_{\text{св}}^4(x) : :: \xi_{\text{св}}^4(y) : dx dy \rangle_0,$$

$$E_3 = \frac{1}{3!} \langle \left(\int_{\Lambda} : \xi_{\text{св}}^4(x) : dx \right)^3 \rangle_0, \quad (7)$$

$$M = \int_{\Lambda} \delta m(x) : \xi_{\text{св}}^2(x) : dx,$$

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{\lambda^2}{2} \langle \int_{\Lambda} : \xi_{\text{св}}^2(x) : :: \xi_{\text{св}}^3(y) : dy \rangle_0 = \\ &= \frac{\lambda^2 \cdot 3!}{2} \langle \int_{\Lambda} C_{\text{св}}^3(x-y) dy \rangle_0. \end{aligned}$$

Далее мы определим в общем случае U^{ren} и R -операцию RG над диаграммами. Связь между ними дает следующее утверждение, которое мы докажем чуть ниже.

Теорема 8.2.

Коэффициенты рядов (2) получаются применением R -операции к соответствующим коэффициентам рядов (1), т.е.

$$a_n^{\text{ren}} = R a_n, \quad b_n^{\text{ren}} = R b_n, \quad (8)$$

$$C_n^{\text{ren}}(f_1, \dots, f_k) = R C_n(f_1, \dots, f_k).$$

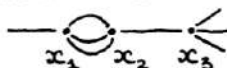
Теорема 8.3.

$a_n^{\text{ren}}, b_n^{\text{ren}}, c_n^{\text{ren}}(f_1, \dots, f_k)$ имеют конечный предел при снятии ультрафиолетового урезания.

Эта теорема Боголюбова - Параскива является основой формальной теории перенормировок.

Докажем теорему 8.3 для случая $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Пусть сначала в G есть только одна массовая поддиаграмма



Разобьем область интегрирования на две:

$$I. \quad |x_3 - x_2| > 3|x_1 - x_2|.$$

Здесь оценим

$$|C(x_2 - x_3) - C(x_1 - x_3)| \leq |x_1 - x_2| C'(x - x_3),$$

где x принадлежит отрезку, соединяющему точки x_2 и x_1 .
Далее достаточно применить теорему счета степеней.

$$II. \quad |x_3 - x_2| < 3|x_1 - x_2|.$$

Учтем, что

$$|C(x_2 - x_3) - C(x_1 - x_2)| \leq C(x_2 - x_3) + C(x_1 - x_3),$$

и снова используем теорему счета степеней (точнее, ее доказательство).

В случае, если в G есть S массовых поддиаграмм K_1, \dots, K_S , изоморфных G_3 , разобьем область интегрирования на 2^S частей A_I , $I \in \{1, \dots, S\}$.
Пусть $f(i)$ - вершина, не принадлежащая K_i и соединенная ребром со второй вершиной $e(i)$ из K_i , пусть $g(i)$ - первая вершина K_i . Определим A_I как область, где

$$|x_{e(i)} - x_{f(i)}| < 3|x_{e(i)} - x_{g(i)}|, \quad i \in I,$$

$$|x_{e(i)} - x_{f(i)}| > 3|x_{e(i)} - x_{g(i)}|, \quad i \in I.$$

Далее так же, как и выше, дело сводится к теореме счета степеней.

Теперь мы переходим к определению R -операции в общем случае.

Алгебра диаграмм и операций над диаграммами.

Вернемся к определению (2.14) диаграмм общего вида. Разбиение каждой диаграммы будем считать состоящим из одного блока - всего \hat{E} . Подынтегральное выражение в (2.14) обозначим $\hat{G}(x_1, \dots, x_n)$. Его можно рассматривать как случайное поле на R^n . Пусть \mathcal{L}_n - пространство линейных комбинаций выражений \hat{G} для фиксированного n . Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

т.е. бесконечные наборы (z_0, z_1, \dots) элементов $z_i \in \mathcal{Z}_i$,
 z_0 - константы.

Превратим \mathcal{Z} в алгебру, введя следующим образом (некоммутативное) произведение $\hat{G}_1 * \hat{G}_2$. Пусть

$$\hat{G}_1(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Z}_n, \quad \hat{G}_2(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{Z}_m.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\hat{G}_1(x_1, \dots, x_n) \hat{G}_2(y_1, \dots, y_m) = \hat{G}_1 * \hat{G}_2$$

и разложим ее по мономам Вика. При этом мы используем следующее правило: произведение двух диаграмм (изображающих мономы Вика) есть сумма диаграмм, полученных объединением этих двух свободных отростков (возможно пустого) из разных диаграмм (см. [19]). Таким образом $\hat{G}_1 * \hat{G}_2 \in \mathcal{Z}_{n+m}$. Так что \mathcal{Z} есть алгебра и для любого $S \in \mathcal{Z}$ имеет смысл экспонента $e^S \in \mathcal{Z}$.

Определим теперь ряд операций над диаграммами.

M-операция. Рассмотрим связную диаграмму G без свободных отростков, с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$. Пусть

$$V = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad i_1 < \dots < i_k.$$

Можно записать

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod' e^{C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)})} \prod'' e^{C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)})},$$

где в \prod' произведение берется по всем ребрам e таким, что одна из вершин $e(j(e))$ не принадлежит V , а вторая $i(e)$ совпадает с одной из вершин i_1, \dots, i_k ; в \prod'' - по остальным ребрам. Определим операцию $M(V)$:

$$M(V)G(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) \prod'' e^{C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)})}, \quad (9)$$

где F - отрезок ряда Тейлора до порядка $\omega(V)$ включительно разложения \prod' как функции x_{i_2}, \dots, x_{i_k} в точке $x_{i_2} = x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = x_{i_1}$ (т.е. по $(x_{i_1} - x_{i_2}), \dots, (x_{i_1} - x_{i_k})$).

Мы положим

$$M(V)G = 0,$$

если либо $\omega(V) < 0$, либо $|V| = 1$, либо V не является одночастично неприводимой (в частности, если V несвязна).

Если $V = \{1, \dots, n\}$, то $M(V)G = G$.
 Удобно представлять себе $M(V)G$ как элемент \mathcal{Z}_n
 т.е.

$$M(V)G = \sum G'(x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

где сумма берется по нескольким диаграммам G' , которые получаются из G следующим образом:

1. Каждое ребро e из вершины $v \in V$ в некоторую вершину i_m , $m=2, \dots, k$, становится ребром из V в i_1 . При этом пропагатором этого ребра (т.е. множитель, соответствующий этому ребру) является производная C_e порядка α_e .
2. Появятся новые ребра из i_1 в i_m , $m=2, \dots, k$, с пропагаторами вида

$$\frac{1}{\beta_m!} (x_{i_m} - x_{i_1})^{\beta_m}$$

Например, в случае $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $M(V)G = 0$ за исключением двух случаев; если G - расходящаяся вакуумная диаграмма, то $M(V)G = G$, а если V - массовая расходящаяся поддиаграмма G , то $M(V)G$ есть G , где V заменяется на "головастик".

В общем случае $M(V)$ также означает замену в G поддиаграммы V "головастиком".

Δ -операция и R -операция.

Так как при применении $M(V)$ вершины и их нумерация не меняются, то имеют смысл операции $M(V_1) + M(V_2)$ и $M(V_1)M(V_2)$. Иначе говоря, для заданного множества вершин $M(V)$ порождает алгебру, действующую в \mathcal{Z}_n . Заметим, что $M(V_1)$ и $M(V_2)$ коммутируют, если

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

В этой алгебре положим

$$\Lambda(V) = 1, \text{ если } |V| = 1, \text{ а если } |V| \geq 2, \text{ то}$$

$$\Lambda(V) = -M(V) \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (11)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ с $m \geq 1$ множества V .

Лемма-определение 8.1.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$. Тогда следующие определения эквивалентны:

$$1. R = \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (12)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ множества N ;

$$2. R = 1 + \sum_{\{V_1, \dots, V_k\}} (-1)^k M(V_1) \dots M(V_k), \quad (13)$$

где сумма по всем лесам, т.е. наборам $\{V_1, \dots, V_k\}$ таким, что отсутствуют частично пересекающиеся пары (т.е. пары V_i, V_j такие, что

$V_i \cap V_j, V_j - V_i, V_i - V_j, V_i \supset V_j$, то непусты) и порядок умножения таков: если $M(V_i)$ стоит левее $M(V_j)$, а в остальном порядок безразличен.

Доказательство очевидно.

Тем самым R -операция определена для всех диаграмм без свободных отростков. Мы определим теперь действие операций M, Λ, R на диаграммы общего вида. Достаточно определить действие $M(V)$, а оно определяется так же, как и раньше, только в множитель, подлежащий разложению в ряд Тейлора, т.е. в Π' включается и

$$\prod_{z \in E} \xi_z(x_{i(z)}).$$

По линейности операции Λ и R определяются на любом элементе \mathcal{Z} .

Определим перенормированное взаимодействие формулой

$$-U^{ren} = \Lambda(e^{-\lambda U} - 1). \quad (14)$$

Таким образом, в общем случае это формальный ряд по λ . Нетрудно видеть, что это определение согласуется с определением (7) в рассмотренном выше примере. Перейдем к доказательству теоремы 8.2. Докажем сначала, что

$$\langle \exp(-U^{ren}) \rangle_0 = R \langle \exp(-\lambda U) \rangle_0, \quad (15)$$

т.е. первую формулу (8).

Перепишем левую часть

$$\begin{aligned}
 & \langle \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Lambda(-U)^k) \rangle_0 = \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \sum_{(k_1, \dots, k_s), K_1 + \dots + K_s = m} \frac{1}{k_1! \dots k_s!} \langle \Lambda(-U)^{K_1} \dots \Lambda(-U)^{K_s} \rangle_0 = \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\alpha} \langle \Lambda(U^{K_1}) \dots \Lambda(U^{K_s}) \rangle_0 = \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-\lambda)^m}{m!} \right) R(\langle U^m \rangle_0).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для доказательства второй и третьей формул (8) достаточно заметить, что R мультипликативна в следующем смысле:

$$R(\langle U^m \rangle \langle U^n \rangle) = R(\langle U^m \rangle) R(\langle U^n \rangle)$$

и, следовательно, $R \ln = \ln R$. Отсюда вторая формула (8) следует, если взять \ln от обеих частей (15).

Теперь мы только вкратце скажем о доказательстве теоремы Боголюбова - Парасика.

Заметим, во-первых, что в случае, когда в диаграмме отсутствуют частично пересекающиеся примитивно расходящиеся поддиаграммы (а так обстоит дело в нашей модели при $\varepsilon > 0$), доказательство ее чрезвычайно просто. Действительно, правая часть формулы (13) в этом случае переписывается в виде

$$R = \prod_V (1 - M(V)), \tag{17}$$

где произведение по всем V с $\omega(V) \geq 0$, причем если $V = V'$, то $1 - M(V)$ стоит левее $1 - M(V')$, в остальном порядок безразличен. Далее доказательство вполне аналогично приведенному выше доказательству для случая $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Для общего случая доказательство на русском языке имеется в работах [15, 16]. Оно использует α -представление и легко переводится в евклидову область. Идея доказательства такая же, как в теореме счета степеней - проверить отсутствие (в данном случае сокращение) расхождений в каждом опасном секторе.

§ 9. ОБЛАСТЬ $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

В этой области расходуется одна вакуумная диаграмма



(1)

и согласно предписаниям §8 мы рассмотрим взаимодействие

$$U_N^{ren} = U_N + E_N,$$

$$E_N = \langle \iint_{\Lambda \Lambda} : \xi_{\leq N}^4(x) : : \xi_{\leq N}^4(y) : dx dy \rangle_0. \quad (2)$$

Мы снова докажем равномерную ограниченность

$$Z_N^{ren} = \langle \exp(-U_N - E_N) \rangle_0 \leq \text{const}. \quad (3)$$

Отсюда не следует, конечно, существования предельной меры μ_Λ , но совершенно аналогичное кластерное разложение для

$$\langle \exp(i \xi_\varphi - U_N^{ren}) \rangle_0 \quad (4)$$

показывает существование предела (3) для любой $\varphi \in \mathcal{S}(R^D)$ и для производящего функционала

$$\langle e^{i \xi_\varphi} \rangle_{\mu_\Lambda} = \frac{\langle \exp(i \xi_\varphi - U_N^{ren}) \rangle_0}{\langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_0}. \quad (5)$$

Из кластерного разложения следуют также различные свойства непрерывности этого функционала по φ , откуда вытекает, что он определяет меру μ_Λ , сингулярную относительно μ_0 . Из кластерного разложения следует также OS-положительность поля, определяемого мерой μ_Λ .

Новая трудность возникает при доказательстве (3): при заключительной оценке диаграмм в них возникают связанные компоненты вида (1), и мы не получим множителя $M_e^{-\varepsilon_0}$ в каждой

$P(e, \Delta)$ - вершине. Надо сократить эти компоненты. Для

этого мы изменим тождество (7.1) следующим образом:

$$Z_N^{ren} = \langle \prod_{\alpha \in R} [C_\alpha (I_\alpha + P_\alpha)] \exp(-U_N^{ren}) \rangle_0, \quad (5)$$

где операция C_α определяется так: $C_\alpha I_\alpha \equiv I_\alpha$, а $C_\alpha P_\alpha$ означает, что в появившейся P_α -вершине мы

спариваем все высокоимпульсные отростки, т.е. все ξ_j с $j \geq k + d_0$, если $\alpha = (e, \Delta_{ki})$. Упорядочивание по α такое же, как в §7. Подчеркнем, что и E_N зависит от S_{eki} , и P_α действует на $\exp(-U_N - E_N)$. Множитель $\frac{\partial E_N}{\partial S_{eki}}$ мы тоже рассматриваем как диаграмму (без свободных отростков), которую C_α не меняет. При спаривании отростков мы пользуемся формулой (интегрирование по частям, см. лемму 2.2 и [13])

$$\begin{aligned} \langle : \xi_{i_1}(x) \dots \xi_{i_k}(x) : R e^{-U} \rangle_0 &= \int_{\wedge} \langle \xi_{i_1}(x) \xi(y) \rangle \times \\ &\times \langle : \xi_{i_2}(x) \dots \xi_{i_k}(x) : \left[\frac{\delta R}{\delta \xi(y)} - R \frac{\delta U}{\delta \xi(y)} \right] e^{-U} \rangle_0 dy, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k = 1, 2, 3, 4$; R - ранее возникший множитель перед экспонентой. Функциональная производная определяется обычным формальным образом. Например,

$$\frac{\delta}{\delta \xi(y)} \int_{\wedge} \xi^4(x) : dx = \int_{\wedge} \delta(x-y) \cdot 4 \cdot \xi^3(x) : dx.$$

О члене $\frac{\delta R}{\delta \xi}$ мы говорим, что произошло спаривание с ранее возникшими вершинами (отростками), а о $R \frac{\delta U}{\delta \xi}$ - что произошло спаривание с экспонентой и возник новый множитель $\frac{\delta U}{\delta \xi}$, называемый C_α -вершиной (если спаривание ведется в вершине α). Таким образом может возникнуть не более 4 C_α вершин. Диаграмма (1) возникает тогда и только тогда, когда первый отросток P_α -вершины спаривается с экспонентой, а ос-

такие три - с возникшей при этом C_α -вершиной. Однако эти члены полностью сокращаются. Точнее, обозначим \bar{s} набор чисел $s_{\alpha k i}$ после применения P_α , R - множитель перед экспонентой перед применением P_α . Тогда

$$\left\langle \frac{\partial U(\bar{s})}{\partial s_\alpha} U(\bar{s}) \right\rangle \left\langle R e^{-U(\bar{s}) - E(\bar{s})} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial E(\bar{s})}{\partial s_\alpha} R e^{-U(\bar{s}) - E(\bar{s})} \right\rangle \equiv 0 \quad (7)$$

Однако, так как мы спариваем только высокоимпульсные слагаемые, то от $\frac{\partial E}{\partial s_\alpha}$

останутся диаграммы ($\alpha = (e, \Delta_{ki})$) типа (1), в каждой из которых есть хотя бы одно низкоимпульсное спаривание. Простая оценка дает

$$\left| \Delta_k \bigcirc_{k+\alpha_0-1}^e \Delta_k \right| \leq C M e^{-\varepsilon} \quad (8)$$

где Δ около вершины означает, что в этой вершине берется

\int , а число около ребра указывает клетку импульсов, которой соответствует спариваемые этим ребром отростки (остальные два ребра несут произвольный импульс).

Таким образом, в каждой обобщенной диаграмме в правой части (5) нет связанных компонент с одной вершиной, а в связанных компонентах с двумя вершинами обязательно есть низкоимпульсные отростки.

Любую C_α -вершину можно разбить в сумму вершин, локализованных в кубах Δ_{kj} . Выбором n_0 можно задавить все такие вершины, кроме Δ_{ki} и соседних с ним кубов. Это замечание позволяет трактовать C_α -вершины аналогично P_α вершинам.

Далее все идет в полной аналогии с предыдущим параграфом: можно убедиться, что оценка (7.9) сохраняется. Вместо

$$M_n^{3-2\varepsilon} \quad \text{в (7.10) будет } M_n^{4-\frac{2}{3}-2\varepsilon'}, \quad \text{где } \varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{3}.$$

Нельзя только использовать разбиение на отдельные вершины, которое может дать диаграмму (1) с высокоимпульсными ребрами и, следовательно, расходящуюся. Поэтому мы используем другое разбиение. Оно состоит а) из отдельных вершин, в которых число высокоимпульсных отростков не более 3; б) из пар соседних (соединенных высокоимпульсным ребром) вершин, хотя бы у одной из которых 4 высокоимпульсных отростка. Такое разбиение очевидно существует для любой диаграммы.

Нам надо получить множитель

$$|\Delta|^{\frac{4-k}{4}} M_e^{-\varepsilon_0}$$

на каждую вершину (ℓ, Δ) с k высокоимпульсными отростками. В случае а) применима оценка (6.61), если в ней взять

$\tilde{\varepsilon} = -\frac{1}{6} + \varepsilon'$, и мы получаем нужный множитель на эту вершину. В случае б) возможно 4 случая, когда первая вершина имеет 4 высокоимпульсных, а вторая — $k \leq 4$ таких отростков.

Если $k = 4$, то, например,

$$\| \rightarrow \text{---} \leftarrow \| = ((\text{---})^2)^{1/2}, \quad (9)$$

что дает сходящуюся диаграмму и нужный множитель на каждую из двух вершин.

Рассмотрим случай $k = 3$. Например,

$$\begin{aligned} \| \rightarrow \text{---} \leftarrow \| &\leq \left(\begin{array}{c} \Delta \\ \circ \\ \Delta' \end{array} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\| \text{---} \Delta \text{---} \leftarrow \| \right)^2 \left(\begin{array}{c} \Delta \\ \circ \\ \Delta' \end{array} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\begin{array}{c} \circ \\ \Delta \end{array} \right)^{1/2} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \Delta \end{array} \right)^{1/4} \leq \Delta^{1/4} M_e^{-\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

т.е. все сводится к случаю а) и к (9). Легко понять, что все остальные случаи диаграммы оцениваются как в (10), где осуществляется "разделение" двух этих вершин.

Это завершает доказательство устойчивости.

$$\S 10. \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \varphi_3^4$$

В случае $\varepsilon = \frac{1}{3}$ как мы знаем из §8, появляется еще одна расходящаяся вакуумная диаграмма



и расходящаяся массовая диаграмма



Определение U^{ren} дается формулой (8.7). Небольшим изменением определения C_α -операции можно добиться сокращения всех вакуумных расходящихся диаграмм. Основная трудность состоит в том, что массовые диаграммы не удастся полностью сократить. Оценки диаграмм поэтому сильно усложнятся за счет того, что расходящиеся массовые диаграммы должны быть скомпенсированы сходящимися множителями. Это удастся в основном благодаря тому, что массовые расходимости являются логарифмическими. Здесь мы укажем только необходимые изменения в алгоритме разложения, а за детальным доказательством отослём читателя к статье [3].

Прежде всего, формула (9.5) изменяется так

$$Z^{ren} = \langle \prod_{\alpha \in R} [C_\alpha(I_\alpha + P_\alpha)]^{m_\alpha} \exp(-U^{ren}) \rangle_0,$$

т.е. в каждой клетке α операция $C_\alpha(I_\alpha + P_\alpha)$ применяется m_α раз. Кроме этого, изменяется определение C_α . Все остальное определяется как в предыдущем параграфе. Остается определить m_α и C_α .

Пусть $\alpha = (\ell, \Delta_{\kappa i})$. Тогда

$$m_\alpha = 0, \quad \text{если} \quad \ell < \sup(2, \kappa + 2),$$

а в остальных случаях

$m_\alpha = 1$, если $|\Delta_K|^{-1} \leq M_e^{\epsilon/2}$ (случай 2) ;

$m_\alpha = [M_e^\epsilon]$, если $|\Delta_K|^{-1} > M_e^{\epsilon/2}$ (случай 1).

Определение C_α .

Случай 1. Как только возникает P_α -вершина, все ее отростки спариваются. Появляются новые C_α -вершины, все отростки которых снова спариваются со следующими исключениями:

$a_1)$ если P_α -вершина получается из массового контрчлена, то отростки появившихся здесь C_α -вершин не спариваются;

$a_2)$ если P_α -вершина оказывается спаренной три раза с одной новой C_α -вершиной и один раз со второй новой C_α -вершиной, образуя при этом массовую поддиаграмму, то четвертый отросток первой новой C_α -вершины спаривается, а три отростка второй новой C_α -вершины не спариваются;

$a_3)$ если P_α -вершина оказывается спаренной три раза с ранее появившимися вершинами и один раз - с новой C_α -вершиной, то это последнее спаривание устраняется с помощью формулы (9.6), примененной в обратном направлении. Например,

$$\begin{aligned} & \int \langle \xi_{i_1}(x) \xi(y_1) \rangle \langle \xi_{i_2}(x) \xi(y_2) \rangle \langle \xi_{i_3}(x) \xi(y_3) \rangle \times \\ & \times \langle \xi_{i_4}(x) \xi(z) \rangle \cdot \left\langle \frac{\delta R}{\delta \xi(y_1) \delta \xi(y_2) \delta \xi(y_3)} \right\rangle \times \\ & \times \left(- \frac{\delta U}{\delta \xi(z)} \right) e^{-U} > dy_1 dy_2 dy_3 dz = \\ & = \int \langle \xi_{i_1}(x) \xi(y_1) \rangle \langle \xi_{i_2}(x) \xi(y_2) \rangle \langle \xi_{i_3}(x) \xi(y_3) \rangle \times \\ & \times \langle \xi_{i_4}(x) \frac{\delta^3 R}{\delta \xi(y_1) \delta \xi(y_2) \delta \xi(y_3)} \rangle e^{-U} > \prod_{i=1}^3 dy_i \end{aligned}$$

$$- \int_{e=1}^4 \langle \xi_{ie}(x) \xi(y_e) \rangle \langle e^{-\nu \frac{\delta^4 R}{\prod_{e=1}^4 \delta \xi(y_e)}} \rangle \prod_{e=1}^4 dy_e.$$

Случай 2. Каждый отросток P_α -вершины ξ представляется в виде

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_e,$$

где φ_h содержит лишь поля ξ_i с $i \geq \kappa+2$ ("хорошо локализованные" или "высокоимпульсные"), а φ_e - поля ξ_i с $i < \kappa+2$ (низкоимпульсные). Спариваются только φ_h -отростки P_α -вершины (отростки C_α -вершин не спариваются вообще).

§11. ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

В указанной в предисловии работе [3] (см. также [22]) завершается развитие техники, начатое в классических работах [1,2].

По существу те же идеи, но совершенно другая техника начала развиваться Галлаотти и др. [5,6] и продолжает сейчас развиваться в работах Балабана [8].

Инфракрасный вариант техники [1-3] имеется в статье [4], а инфракрасный вариант техники [5,6,8] - в работах Гавендзкого и Куяйнена [7].

Новый вариант техники предложен Федербушем [9]. Все перечисленные работы рекомендуются как продолжение изучения ультрафиолетовых и инфракрасных проблем (см. также сборник [12]).

Относительно φ^4 наиболее принятой точкой зрения состоит в том, что эта модель не существует. [11,12]. Однако есть и другие мнения [10,20].

Все остальные вопросы конструктивной теории поля отражены в монографии [13]. (Полную библиографию до 1976 года см. в [15] и [17].) По формальной теории перенормировок пока непревзойденной является книга [16]. По аксиоматической теории поля вводными книгами являются [23] и [24].

Физических книг много (последняя переводная из них [25]), но автору трудно судить о физической стороне дела.

ДОПОЛНЕНИЕ 1. ОДНОМЕРНЫЕ ПОЛЯ

Здесь размерность пространства - нуль, времени - 1. На простейшем примере показывается связь эвклидова и гамильтонова подхода, переход к бесконечному объему, связь со стохастическими дифференциальными уравнениями. Подробнее см. [14, гл.5; 13].

Процесс Орнштейна - Уленбека.

Рассмотрим стационарный гауссовский процесс, $\xi(t), t \in \mathbb{R}^1$, со средним $\langle \xi(t) \rangle_0 = 0$ и с ковариацией

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle_0 = \exp(-m|t-t'|), m > 0.$$

Пусть (Ω, Σ, μ_0) - соответствующее вероятностное пространство, Σ_t - наименьшая σ -алгебра, относительно которой измерима одна случайная величина $\xi(t)$.

Обозначим

$$\mathcal{H}_t = L_2(\Omega, \Sigma_t, \mu_0) \subset \mathcal{H} = L_2(\Omega, \Sigma, \mu_0).$$

Пусть P_t - ортогональный проектор на \mathcal{H}_t , U_t - сдвиг в \mathcal{H} , переводящий $\mathcal{H}_{t'}$ в $\mathcal{H}_{t'+t}$ (можно считать, что Σ - наименьшая σ -алгебра, содержащая всю Σ_t). \mathcal{H}_0 называется еще физическим гильбертовым пространством.

Марковский оператор.

Определим операторы $T_t : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$

$$T_t = P_0 U_t P_0. \quad (1)$$

\mathcal{H}_0 может быть естественным образом отождествлено с

$$L_2(\mathbb{R}^1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx,$$

а $\xi(0)$ с функцией x на \mathbb{R}^1 .

Ортогонализация последовательности $1, \xi(0), \xi^2(0), \dots$ приводит к ортонормированному базису в \mathcal{H}_0 (см. [14, 19]):

$$1, \xi(0), \dots, \frac{1}{\sqrt{n!}} : \xi^n(0); \dots$$

Мы имеем

$$\tilde{f}_t (: \xi^n(0) :) = P_0 (: \xi^n(t) :) = : \xi^n(0) : \exp(-mn|t|). \quad (2)$$

В качестве следствия получаем марковское свойство

$$\tilde{f}_{t_1} \tilde{f}_{t_2} = \tilde{f}_{t_1+t_2} \quad (3)$$

и дискретность спектра \tilde{f}_t . Отсюда видно также, что \tilde{f}_t самосопряжен;

$$\tilde{f}_t = \tilde{f}_t^* = U_{-t} P_t P_0. \quad (4)$$

Полугруппа \tilde{f}_t сильно-непрерывна и допускает представление

$$\tilde{f}_t = e^{-tH_0}, \quad (5)$$

где H_0 - самосопряженный оператор с дискретным спектром (простые собственные значения $0, m, 2m, 3m, \dots$).

Гармонический осциллятор.

Введем операторы рождения-уничтожения в $L_2(R^1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}})$:

$$a^* : x^n : = \sqrt{n+1} : x^{n+1} : ;$$

$$a : x^n : = \sqrt{n} : x^{n-1} : , \quad n \geq 1 ;$$

$$a : 1 : = 0$$

со всюду плотной областью определения (все многочлены). Легко видеть, что на этой области определения

$$H_0 = m a^* a. \quad (6)$$

Известно, что с точностью до константы H_0 можно отождествить с квантовомеханическим оператором энергии гармонического осциллятора, причем \mathcal{H}_0 отождествляется с $L_2(R^1, dx)$ посредством

$$\xi^n(0) \leftrightarrow x^n \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-x^2/2}, \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m} x + \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right),$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m} x - \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right),$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 x^2 - m \right).$$

Гиббсовская перестройка.

Рассмотрим новую меру μ_N на (Ω, Σ) с плотностью Радона - Никодима относительно меры μ_0 , равной

$$\frac{d\mu_N}{d\mu_0} = Z_N^{-1} \exp \left(-\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt \right), \quad (8)$$

где

$$Z_N = \left\langle \exp \left(-\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt \right) \right\rangle_0.$$

Относительно меры μ_N $\xi(t)$ становится новым случайным процессом.

Теорема 1.

При $N \rightarrow \infty$ существует слабый предел конечномерных распределений

$$\lim \mu_N (\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n).$$

По теореме Колмогорова это определяет меру μ на (Ω, Σ) .

Получившийся новый процесс $\xi(t)$ (по мере μ) является стационарным, марковским и имеет

Экспоненциальное убывание корреляций:

$$|\langle \xi(t) \xi(t_1) \rangle_\mu| \leq C \delta^{|t-t'|}, \quad \delta < 1. \quad (9)$$

Для доказательства этой теоремы вводится

Трансфер-матрица.

Введем операторы $T_t: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$

$$T_t = U_{-t} P_t \exp \left(-\lambda \int_0^t \xi^4(t) dt \right) P_0 \quad (10)$$

со свойствами:

$$(i) \quad T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1+t_2},$$

что следует из трансляционной инвариантности и марковости

$$\begin{aligned} T_{t_1} T_{t_2} &= U_{-t_1} P_{t_1} \exp(-\lambda \int_0^{t_1} \xi^4(t) dt) U_{-t_2} P_{t_2} \times \\ &\times \exp(-\lambda \int_0^{t_2} \xi^4(t) dt) P_0 = \\ &= U_{-(t_1+t_2)} P_{t_1+t_2} \exp(-\lambda \int_0^{t_1+t_2} \xi^4(t) dt) P_0 = \\ &= U_{-(t_1+t_2)} P_{t_1+t_2} \exp(-\lambda \int_0^{t_1+t_2} \xi^4(t) dt) P_0 = T_{t_1+t_2}; \end{aligned} \quad (11)$$

(ii) T_t есть сильно-непрерывная полугруппа самосопряженных ограниченных операторов и поэтому представима в виде

$$T_t = e^{-tH};$$

(iii) $H = H_0 + V$, где V - умножение на $\lambda \xi^4(0)$, что показывает формальное дифференцирование

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{\Delta t} - 1}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{U_{-\Delta t} P_{\Delta t} P_0 - 1}{\Delta t} + \right. \\ &+ \left. \frac{U_{-\Delta t} P_{\Delta t} (-\lambda \xi^4(0) \Delta t) P_0}{\Delta t} \right) = -H_0 - \lambda \xi^4(0) \end{aligned} \quad (12)$$

(подробнее см. [14, с. 151-152]).

Аналогично (7) H соответствует ангармоническому осциллятору

$$H = \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 x^2 + \lambda x^4 - m \right). \quad (13)$$

Следствие 1.

H имеет дискретный спектр, состоящий из простых собственных значений. Максимальное собственное значение \bar{E}

положительно и соответствующий ему собственный вектор ω является строго положительной функцией из \mathcal{H}_0 .

Первое утверждение хорошо известно [14], второе является аналогом теоремы Перрона - Фробениуса. Именно, надо доказать, что T_t усиливает положительность (т.е.

$$(T_t f, h)_0 > 0$$

для всех $f, h \geq 0$ из $L_2(\Omega, \mu_0)$, не равных нулю (см. [14], с.156-157). Действительно, $\exp(-H_0 t)$ усиливает положительность (гауссовы скачки), т.е.

$$(P_t f, P_0 h)_0 > 0.$$

Но

$$\exp\left(-\int_0^t \xi^4(t) dt\right) > 0.$$

Поэтому

$$(P_t f, \exp\left(-\int_0^t \xi^4(t) dt\right) P_0 h)_0 > 0,$$

что и требовалось. $(\cdot, \cdot)_0$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mu_0)$.

Для установления связи между гиббсовской перестройкой и трансфер-матрицей нуль

Формулы ФКН (Фейнмана - Капа - Нильсона).

Пусть $\omega_0 \equiv 1$ собственный вектор H_0 с собственным значением 0. Из положительности ω следует, что

$(\omega, \omega_0) > 0$. Тогда

$$Z_N = (\omega_0, T_{2N} \omega_0), \quad (14)$$

и для любых ограниченных комплексных функций $F, F_1, \dots, \dots, F_n$ и всех $-N < t_1 < \dots < t_n < N$

$$\begin{aligned} \langle F(\xi_0) \rangle_{\mu_N} &\equiv \\ &\equiv \frac{\langle F(\xi_0) \exp(-\int_{-N}^N \xi^4(t) dt) \rangle_0}{Z_N} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\omega_0, T_N F(\xi_0) T_N \omega_0)_0}{(\omega_0, T_{2N} \omega_0)_0} ; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \langle F_1(\xi_{t_1}) \dots F_n(\xi_{t_n}) \rangle_{\mu_N} = \\ & = Z_N^{-1} (\omega_0, T_{N-t_n} F_n(\xi(0)) T_{t_n-t_{n-1}} F_{n-1}(\xi(0)) \dots \\ & \dots F_1(\xi(0)) T_{t_1+N} \omega_0)_0 . \end{aligned}$$

Приведем, например, доказательство (14):

$$\begin{aligned} (\omega_0, T_{2N} \omega_0)_0 &= \langle P_0 \exp(-\lambda \int_0^{2N} \xi^4(t) dt) \cdot 1 \rangle_0 = \\ &= \langle \exp(-\lambda \int_0^{2N} \xi^4(t) dt) \rangle_0 = \langle \exp(-\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt) \rangle_0 . \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство слабой сходимости конечномерных распределений в теореме 1 проводится теперь просто, если использовать следствие 1. Например,

$$\langle F(\xi_0) \rangle_{\mu_N} = \frac{(1, e^{-NH} F(\xi_0) e^{-NH} 1)_0}{(1, e^{-2NH} 1)_0} \sim \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sim \frac{e^{-2NE} (\omega_0, \omega)_0^2 (\omega, F(\xi(0)) \omega)_0}{e^{-2NE} (\omega_0, \omega)^2} \longrightarrow \\ & \longrightarrow (\omega, F(\xi(0)) \omega)_0 . \end{aligned}$$

Аналогично доказывается экспоненциальное убывание корреляций.

Связь со стохастическими уравнениями.

Мы видели в (17), что в $L_2(R, dx)$

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V - E,$$

где ∇ - оператор умножения. Введем новую (стационарную) меру

$$d\nu = \omega^2(x) dx, \quad (18)$$

где $\omega(x)$ - положительный собственный вектор H с нулевым собственным значением, причем нормировка выбрана так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(x) dx = 1, \quad T_t \omega = \omega. \quad (19)$$

Заметим, что $L_2(R, d\nu)$ и $L_2(R, dx)$ унитарно эквивалентны, причем унитарная эквивалентность осуществляется умножением $f \in L_2(R, d\nu)$ на $\omega(x)$. Таким образом, в $L_2(R, d\nu)$ наш оператор переписывается в виде

$$\tilde{H} = \frac{1}{\omega(x)} \left(-\frac{1}{2}\Delta + V - E \right) \omega(x) = \quad (20)$$

$$= -\frac{1}{2}\Delta + \frac{\omega'}{\omega} \nabla - \frac{\Delta \omega}{2\omega} + V - E = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{\omega'}{\omega} \nabla;$$

т.е. $-\Delta \omega + (V - E)\omega = H\omega = 0$.

Тогда $-\tilde{H}$ определяет марковскую полугруппу с обратным уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial x},$$

где

$$a = 1, \quad b = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Это соответствует стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} dt + dW(t). \quad (21)$$

Пусть снова, как в §1, \mathcal{L} и \mathcal{L}_1 — изоморфные линейные пространства. Обозначим $G(\mathcal{L})$ алгебру Грассмана с единицей над \mathcal{L} , т.е. алгебру многочленов от антикоммутирующих переменных $\psi(f)$, где мы обозначаем через f элементы \mathcal{L} . Тогда $\psi(f) \in \mathcal{L}_1 \subset G(\mathcal{L})$.

Для того, чтобы определить действие (см. (5) ниже), мы введем далее норму на \mathcal{L} . Пусть $\bar{\mathcal{L}}$ — пополнение \mathcal{L} по этой норме. Рассмотрим теперь антисимметрическое пространство Фока $\mathcal{F}_a(\bar{\mathcal{L}})$ над $\bar{\mathcal{L}}$. отождествим $G(\mathcal{L})$ с алгеброй операторов рождения $a^*(f)$ в $\mathcal{F}_a(\bar{\mathcal{L}})$

$$a^*(f) = \psi(f), \quad f \in \mathcal{L}.$$

Операторы $a^*(f)$ ограничены

$$\|a^*(f)\| = \|f\|, \quad (1)$$

и поэтому на $G(\mathcal{L})$ определена норма, а замыкание $\overline{G(\mathcal{L})}$ алгебры $G(\mathcal{L})$ по этой норме является банаховой алгеброй.

Гауссовские функционалы.

Линейный функционал $\langle \cdot \rangle$ на $G(\mathcal{L})$ называется гауссовским квазисостоянием, или обобщенно-свободным ферми-полем, если $\langle 1 \rangle = 1$, средние от произведения нечетного числа $\psi(f)$ равны нулю и

$$\langle \psi(f_1) \dots \psi(f_{2n}) \rangle = \prod (-1)^{|\pi|} (f_{i_1}, f_{j_1}) \dots (f_{i_n}, f_{j_n}), \quad (2)$$

где произведение по всем подстановкам

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

таким, что $i_1 < j_1, \dots, i_n < j_n$; $|\pi|$ — четность π .

Далее \mathcal{L} конкретизируется (это удобно для введения OS-положительности и из других соображений): \mathcal{L} будет прямой суммой $2n$ экземпляров пространств Шварца $S(R^{\nu})$, а \mathcal{L}_1 линейно порождается

$\psi^\alpha(f), \bar{\psi}^\alpha(f), f \in S(R^p), \alpha = 1, \dots, n$.
 Нормы на \mathcal{L} обычно будут иметь вид нормы в $L_2(R^p, dx)$.
 Иногда удобно пользоваться нормой

$$\|f\| = \int_{R^p} \frac{|\tilde{f}(k)|^2}{(k^2 + 1)^\alpha} dk \quad (3)$$

для достаточно больших α таких, чтобы δ -функции и их первые производные принадлежали \mathcal{L} . Часто α при этом удобно связывать с рассматриваемым гауссовским квазисостоянием (например, с полем Дирака, см. ниже).

В данном случае среди двухчастичных функций Швингера могут быть отличны от нуля только

$$\langle \bar{\psi}^\alpha(f) \psi^\beta(g) \rangle,$$

и гауссовское квазисостояние полностью ими определяется ввиду (2). Примером могут служить фермиовский белый шум с $m > 0$

и с
$$\langle \bar{\psi}^\alpha(f) \psi^\beta(g) \rangle_m = \delta_{\alpha\beta}(f, g) \frac{1}{m} \quad (4)$$

и поле Дирака (см. ниже).

Урезанное поле.

Для заданной $x \in C_0^\infty(R^p)$ обозначим $x_x = x(x - \cdot)$

$$\psi_x(x) = \psi(x_x),$$

и аналогично для $\bar{\psi}$.

Лагранжиан.

$$L(x, x) = L(\psi_x^\alpha(x), \bar{\psi}_x^\alpha(x), \frac{\partial \psi_x^\alpha(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial \bar{\psi}_x^\alpha(x)}{\partial x_i}),$$

где L - многочлен или сходящийся ряд в $\bar{G}(\mathcal{L})$.

Евклидово действие
 в объеме $\Lambda \subset R^p$

$$U_{\Lambda, x} = \int_{\Lambda} L(x, x) dx. \quad (5)$$

Интеграл имеет смысл, так как $L(x, \varphi)$ — непрерывная функция от x со значениями в банаховой алгебре $G(\mathcal{L})$.

Гиббсовская перестройка

функционала $\langle \cdot \rangle$ в Λ с урезанием φ
Так называется линейный функционал на $G(\mathcal{L})$

$$\langle A \rangle_{\Lambda, \varphi} = Z_{\Lambda, \varphi}^{-1} \langle A \exp(-U_{\Lambda, \varphi}) \rangle, \quad (6)$$

если

$$Z_{\Lambda, \varphi} = \langle \exp(-U_{\Lambda, \varphi}) \rangle \neq 0, \quad (7)$$

$$Z_{\Lambda, \varphi} \neq \infty.$$

Предельной гиббсовской перестройкой мы назовем функционал

$$\langle A \rangle_{\infty} = \lim_{\Lambda \rightarrow R^D} \lim_{\varphi} \langle A \rangle_{\Lambda, \varphi}, \quad (8)$$

если он существует.

Свободные поля определяются как обычно квадратичными лагранжианами. Мы построим

Поле Дирака на R^D ($x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$).
Оно состоит из 8 компонент

$$\Psi(x) = (\psi^1(x), \dots, \psi^4(x)), \quad \bar{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1(x) \\ \vdots \\ \bar{\psi}^4(x) \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан его имеет вид

$$L(x) = m \bar{\Psi}(x) \Psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu}^E \bar{\Psi}(x) - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu}^E \bar{\Psi}(x), \quad (9)$$

где $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$, но $\mu = 1, 2, 3, 0$ ведется суммирование, $\bar{\Psi} \Psi = \bar{\psi}^1 \psi^1 + \dots + \bar{\psi}^4 \psi^4$, и т.д. Евклидовы матрицы Дирака самосопряжены и имеют вид

$$\gamma_0^E = \gamma_0, \quad \gamma_j^E = i \gamma_j,$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

γ_μ^E эрмитовы и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (10)$$

Поле Дирака по определению есть

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^V} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{m' \rightarrow 0} \frac{\langle A \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}}{\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}} \quad (11)$$

(предел $m' \rightarrow 0$ заменяет формальный функциональный интеграл, этот предел перестановочен с другими пределами).

С помощью семинвариантов (см., например, [19, гл. 7, §1])

(11) легко вычисляется. Например, для

$$A = \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y) \quad \text{имеем} \quad (12)$$

$$\frac{\langle A \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}}{\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y), U_\Lambda, \dots, U_\Lambda \rangle_{m'}$$

$$\dots, U_\Lambda \rangle_{m'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{R^V} dx_1 \dots dx_n \langle \bar{\psi}^\alpha(x) S_1 \psi_\alpha(x_1) \dots$$

$$x \langle \hat{S}_1 \psi_\alpha(x_1) S_2 \psi_\alpha(x_2) \rangle_{m'} \dots \langle \hat{S}_n \bar{\psi}(x_n) \psi^\beta(y) \rangle_{m'},$$

$$\text{где либо } S_i \psi = m \psi, \quad \hat{S}_i \bar{\psi} = \bar{\psi}, \quad (13)$$

либо

$$S_i \psi = \frac{1}{2} \psi \gamma_\mu^E, \quad \hat{S}_i = \partial_\mu \bar{\psi};$$

либо

$$S_i \psi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \psi \gamma_\mu^E, \quad \hat{S}_i \bar{\psi} = \bar{\psi}. \quad (13)'$$

Ряд (14) есть ряд из n -кратных сверток матриц-функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (S^n)^{\alpha\beta} (x-y), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} (x-x_1) &= \langle \bar{\psi}^\alpha(x) (m \psi(x_1) - \partial_\mu \psi(x_1) \gamma_\mu^E)^\beta \rangle_{m'} = \\ &= \frac{1}{m'} (\delta_{\alpha\beta} \delta(x-x_1) - (\gamma_\mu^E)^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \delta(x-x_1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя к преобразованию Фурье, имеем

$$m' \parallel \tilde{S}^{\alpha\beta}(p) \parallel = m - i \gamma_\mu^E p_\mu \stackrel{\text{def}}{=} m - i p^E. \quad (16)$$

Заметим теперь, что из (12) следует

$$\begin{aligned} (M + i p^E)(M - i p^E) &= (M - i p^E)(M + i p^E) = \\ &= M^2 + p^2, \quad p^2 = \sum_{\mu=0}^3 p_\mu^2, \quad M = m' + m. \end{aligned} \quad (17)$$

После суммирования ряда (15)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m'} \left(1 - \frac{m - i p^E}{m'} + \dots + (-1)^n \left(\frac{m - i p^E}{m'} \right)^n + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{m'} \left(1 + \frac{m - i p^E}{m'} \right)^{-1} = (M - i p^E)^{-1} = \\ &= \frac{M + i p^E}{M^2 + p^2} \end{aligned}$$

и перехода к пределам (11) нетрудно видеть, что

$$\langle \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y) \rangle = (2\pi)^{-4} \int e^{-ip(x-y)} \frac{(m + i\epsilon \not{p})^{\alpha\beta}}{m^2 + p^2} d^4p. \quad (18)$$

Предельные переходы под знаком \sum нетрудно обосновать, например, при достаточно большой массе $m > 0$, когда ряды сходятся равномерно по Λ, ϵ, m . Можно также рассмотреть периодические граничные условия в Λ . Но проще определить свободное поле Дирака формулой (18).

Положительность Остервальдера - Шредера.

Введем в алгебре $G(\mathcal{L})$ инволюцию θ соотношением

$$\begin{aligned} \theta\psi &= \theta(\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x), \psi^4(x)) = \\ &= (\bar{\psi}^1(\theta x), \bar{\psi}^2(\theta x), -\bar{\psi}^3(\theta x), -\bar{\psi}^4(\theta x)) \end{aligned} \quad (19)$$

и так же для $\bar{\psi}$. Как инволюция, θ удовлетворяет, например, соотношению

$$\theta(\psi^\alpha \bar{\psi}^\beta) = \theta(\bar{\psi}^\beta) \theta(\psi^\alpha) \quad (20)$$

и т.д.

Аксиомы евклидовой квантовой теории поля для ферми-полей таковы

I. Функции Швингера

$$\langle \bar{\psi}(f_1) \dots \bar{\psi}(f_n) \psi(g_1) \dots \psi(g_n) \rangle \quad (21)$$

являются умеренными распределениями (т.е. непрерывны в топологии пространства Шварца);

II. Положительность. Пусть $G_+(\mathcal{L})$ - подалгебра $G(\mathcal{L})$, порожденная всеми $\psi(f), \bar{\psi}(f)$, где $f \in C_0^\infty$ имеет носитель в $\{x: x^0 > 0\} \subset R^D$. Тогда для любого

$$F \in G_+(\mathcal{L}) \quad \langle (\theta F) F \rangle \geq 0. \quad (22)$$

III. Евклидова ковариантность, см. ниже.

Докажем свойство (22) для поля Дирака. Для этого докажем сначала, что

$$\langle (\theta F) F \rangle_{m'} = \langle \theta F \rangle_{m'} \langle F \rangle_{m'} \geq 0, \quad (23)$$

и достаточно доказать, что

$$\langle \theta F \rangle_{m'} = \langle F_n \rangle_{m'}, \quad (24)$$

для любого монома

$$F = \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}^{\alpha_n}(x_n) \psi^{\alpha_n}(x_n) \dots \psi^{\alpha_1}(x_1).$$

Но

$$\theta F = \bar{\psi}^{\alpha_1}(\theta x_1) \dots \bar{\psi}^{\alpha_n}(\theta x_n) \psi^{\alpha_n}(\theta x_n) \dots \psi^{\alpha_1}(\theta x_1).$$

Отсюда и следует (24). Из (23) следует (22), так как лагранжиан есть четный элемент грассмановой алгебры, инвариантный относительно θ .

Евклидова ковариантность.

Пусть g - элемент группы евклидовых вращений R^4 . Пусть \mathcal{D}_g - некоторое 4-х мерное представление группы Лоренца. Тогда преобразование

$$\psi(x) \rightarrow \mathcal{D}_g \psi(g^{-1}(x)), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(g^{-1}(x)) \mathcal{D}_g^{-1}. \quad (25)$$

порождает автоморфизм α_g алгебры $G(\mathcal{L})$. Более того, этот автоморфизм сохраняет $\langle \cdot \rangle_{m'}$, т.е. для всех

$$F \in G(\mathcal{L}) \quad \langle \alpha_g F \rangle_{m'} \equiv \langle F \rangle_{m'}. \quad (26)$$

Мы хотим выбрать \mathcal{D}_g так, чтобы сохранялся и функционал $\langle \cdot \rangle$, определяющий поле Дирака. Для этого достаточно (что следует из разложения (14)) выбрать \mathcal{D}_g так, чтобы сохранялся лагранжиан, т.е.

$$\alpha_g L(x) \equiv L(g^{-1}x). \quad (27)$$

Имеем

$$\alpha_g L(x) = [\alpha_g \bar{\psi}(x)] \gamma_\mu^E \partial_\mu [\alpha_g \psi(x)] - \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\psi}(g^{-1}x) \mathcal{D}_g^{-1} \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g - \dots = \\
&= \bar{\psi}(x') \mathcal{D}_g^{-1} g_\mu^\nu \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \psi(x') - \dots = \\
&= \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \psi(x') - \dots
\end{aligned}$$

и надо найти двузначное представление \mathcal{D}_g , удовлетворяющее условию

$$g_\mu^\nu \gamma_\mu^E = \mathcal{D}_g \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g^{-1} \quad (28)$$

(мы отсылаем за исследованием (28) к книгам по спинорным представлениям).

Окончательно аксиому евклидовой ковариантности в нашем случае можно сформулировать так:

$\langle \cdot \rangle$ на $G(\mathcal{L})$ трансляционно инвариантен и инвариантен относительно α_g .

Если рассматривается гиббсовская перестройка (7) поля Дирака, то условие (7) следует из того, что

$$\exp(-U_{1,x})$$

принадлежит пополнению грассмановой алгебры по надлежащей норме (см. замечание 1), которую можно определить на $(S(R^p))^4$ как

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2) &= \sum_{\alpha, \beta} \int e^{-ip(x-y)} f_1^{(\alpha)}(x) \overline{f_2^{(\beta)}}(y) \times \\
&\times \left| \frac{(m + i\hat{p}^E)^{\alpha\beta}}{m^2 + p^2} \right| d^4 p.
\end{aligned}$$

1. Glimm J. - Commun. Math. Phys., 1968, v.10, N1, p.1-47.
2. Glimm J., Jaffe A. - Fortsch. der Physik, 1973, v.21, p.327-376. (русский перевод в "Математика. Новое в зарубежной науке", N12. Евклидова квантовая теория поля. М.: Наука, 1978).
3. Magnen J., Sénéor R. - Commun. Math. Phys., 1977, v.56, p.237-276.
4. Magnen J., Sénéor R. - Ann. Phys., 1984, v.152, N1, p.130-202.
5. Gallavotti G., et al. - Memorie Accademia del Lincei, 1978, v. XV, p.23-59.
6. Benfatto G., Gallavotti G., Nikolo F. et. al. - Commun. Math. Phys., 1980, v.74, p.95-130;
J. Funct. Anal., 1980, v.36, p.343-400.
7. Gawędzki K., Kupiainen A. - Commun. Math., Phys., 1984, v.92, N4, p.531-553.
8. Balaban T. - Commun. Math. Phys., 1983, v.88, p.411-445.
9. Federbush P., Battle G. - Commun. Math. Phys., 1983, v.88, p.263-293; J. Funct. Anal., 1983, v.51, p.312-325.
10. Gallavotti G., Rivasseau V. Field Theory in dimension 4: A Modern Introduction to its unsolved problems.
Inst. Adv. Study. Princeton. N.J. 1983.
11. Aizenman M., - Commun. Math. Phys., 1982, v.86, N1, p.1-47.
Frölich J., - Nucl. Phys., 1982, B200 (FS 4), p.281.
12. Scaling and Self-Similarity in Physics. Renormalization in Statistical Mechanics and Dynamics. (J. Frölich, ed.)
Birkhäuser, 1983.
13. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1976.
14. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
15. Хенш К. Теория перенормировок. М.: Наука, 1974.
16. Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
17. Малышев В.А. - В кн.: Итоги науки и техники. Серия "Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика", т.14. М.: ВИНТИ, 1977.

18. Малишев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем: лекции для молодых ученых. Дубна, вып. 27, 1983.
19. Малишев В.А., Минтос Р.А. Гиббсовские случайные поля: кластерные разложения. М.: Наука, 1985.
20. Callan C. de, Rivasseau V. - Semmin. Math. Phys., 1984, v 82, p. 4-47.
21. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.1-4. М.: Мир.
22. Feldman J., Osterwalder K. - Ann. Phys., 1976, p.80-135.
23. Йост Р. Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967.
24. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
25. Ипксон К., Эшбер К.-Б. Квантовая теория поля, т.1,2. М.: Мир, 1984.

Вадим Александрович Малышев

ВВЕДЕНИЕ В ЕВКЛИДОВУ КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Заведующий редакцией С.И.Заленский

Редактор Ф.И.Горобец

Технический редактор Е.Д.Захарова

Подписано к печати 18.10.84. Формат 60х90^I/16.

Бумага офсетн. № 1. Офсетная печать.

Усл. печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 4,6. Тираж 500 экз.

Заказ 2088

Цена 15 коп. Заказное

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета

103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.

119899, Москва, Ленинские горы

Цена 15 коп.

